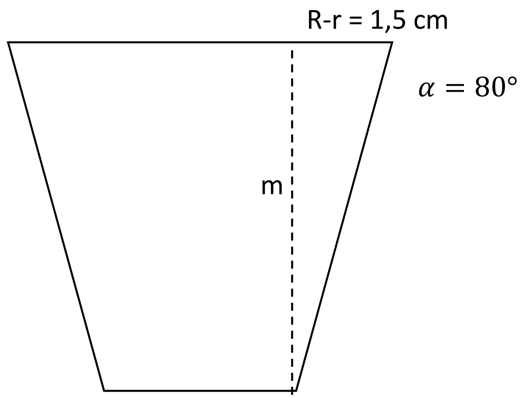
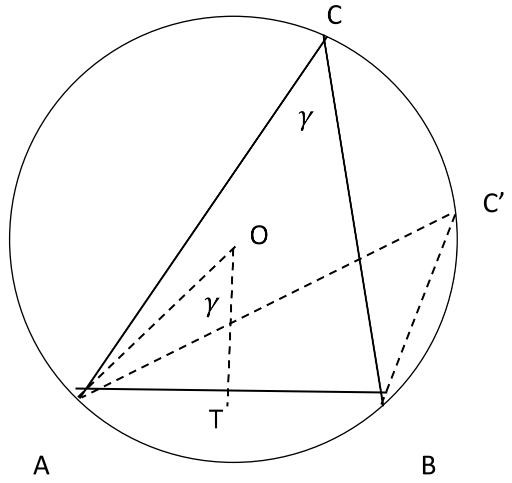
Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely - 2018 április 9. - A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

Sz 1. <u>Csak szakközépiskolásoknak</u>		
Az útiköltséget a feladat szövege alapján két módon fejezhetjük ki: $8000x$, illetve $9000(x-3)-20000$. Mindebből a következő egyenletet kapjuk: $$8000x = 9000(x-3)-20000$$	2 pont	A helyes egyenlet felírása más gondolatmenet esetén is két pont, megoldása szintén 2 pont
Az egyenlet megoldása: $x = 47$	2 pont	
A csoportban végül 44-en utaztak, az útiköltség pedig 376000 forint	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Sz 2. <u>Csak szakközépiskolásoknak</u>		
A csonkakúp magasságának meghatározásához készítsük el forgástengelyt tartalmazó alábbi síkmetszetet: 	1 pont	A magasság meghatározásához felhasználható bármilyen helyes ábra 1 pontot ér.
A csonkakúp magasságát a fenti ábra alapján határozhatjuk meg: az ábrából látható, hogy $$\tan 80° = \frac{m}{1,5}$$ Innen $m = 1,5 \cdot 5,671 = 8,51\ cm$	2 pont	A magasság bármilyen módon történő helyes meghatározásáért jár az 1+2 pont. Legalább 1 tizedesjegy pontosságot

		követeljünk meg, 9 cm nem fogadható el
A csonkakúp térfogat-képlete: $$V=\frac{m(R^2+Rr+\ r^2)\pi}{3}$$ Behelyettesítve: $$V=\frac{8{,}51(4{,}5^2+4{,}5\cdot 3+\ 3^2)\cdot 3{,}14}{3}=381{,}0\ cm^3$$	2 pont	Kisebb számolási hiba esetén 1 pont adható. Képlethiba, vagy több számolási hiba esetén nem jár pont. Ha a versenyző az előző lépésben rosszul számolja ki a magasságot, de utána helyesen számol, megkaphatja a térfogat-számításra a két pontot.
A bögrébe 3,81 dl folyadék fér.	1 pont	A pont csak akkor jár, ha a versenyző megadja (helyesen) deciliterben az eredményt.
Összesen:	**6 pont**	

G-Sz 3. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Használjuk az alábbi ábra jelöléseit: 		Kapjon 1 pontot a versenyző, ha készít egy jól használható, a megoldás irányába mutató ábrát.

Jelölje AB a 6 egység, AC pedig a 8 egység hosszú oldalt. Tudjuk még, hogy az OA sugár 5 egység.	1 pont	
A középponti és kerületi szögek közötti összefüggésből ismeretes, hogy a γ-val jelölt ACB szög fele az AOB középponti szögnek és egyenlő az AOT derékszögű háromszög O-nál lévő szögével.	2 pont	
A fenti összefüggéshez fontos megjegyezni, hogy $AB < AC$, ezért a C pont valóban az ábra szerint, a hosszabbik AB íven van, γ az AOB középponti szög felével (és nem a kiegészítő szögének felével) egyenlő és γ hegyesszög.	1 pont	Ez a pont csak akkor adható, ha ez az indoklás szerepel a dolgozatban.
Az adatok alapján így $\sin\gamma = \frac{AB}{2 \cdot OA} = \frac{6}{2 \cdot 5} = 0{,}6$ ebből, a fenti indoklást figyelembe véve, $\gamma = 36{,}87°\ (0{,}6435\ rad)$ és $\cos\gamma = 0{,}8$	1 pont	Az eredményeket radiánban és fokban egyaránt elfogadjuk.
A BC szakasz hosszát a koszinusz-tétel segítségével határozzuk meg. x-szel jelölve a szakasz hosszát, az alábbi egyenlet írható föl (a koszinusz-tételt az AB oldalra alkalmazva): $6^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot 0{,}8$	1 pont	
A fenti egyenlet gyökei: $x_1 = 10$ és $x_2 = 2{,}8$. Mindkét megoldás megfelel az eredeti feladat feltételeinek (az ábrán az egyik a C, a másik a C'-vel jelzett csúcsnak felel meg).	2 pont	
A hiányzó szögeket pl. a B csúcsnál lévő β szögre alkalmazott szinusz-tétel segítségével határozhatjuk meg: $\sin\beta = \sin\gamma \cdot \frac{AC}{AB} = 0{,}8$ amiből $\beta_1 = 53{,}13°(0{,}9273\ \mathrm{rad}), \beta_2 = 126{,}9°(2{,}214\ \mathrm{rad})$. Az előbbi érték az $AC = 10$, az utóbbi az $AC = 2{,}8$ esetnek felel meg.	2 pont	
Az A-nál lévő szögekre a fentiek alapján $\alpha_1 = 90°(1{,}5708\ \mathrm{rad}), \alpha_2 = 16{,}26°(0{,}2838\ \mathrm{rad})$	1 pont	
Vegyük észre, hogy $AC = 10$ esetén az oldalak pitagoraszi számhármast alkotnak és A-nál pontosan derékszög van.		
Összefoglalva: a feladat feltételeinek két háromszög tesz eleget. Az egyik oldalai rendre <u>10, 8 és 6</u> egység, szögei $\underline{90°(1{,}5708\ \mathrm{rad}), 53{,}13°(0{,}9273\ \mathrm{rad}),\text{ és } 36{,}87°\ (0{,}6435\ rad)}$ A másik háromszög oldalai <u>2,8, 8 és 6</u> egység, szögei $\underline{16{,}26°(0{,}2838\ \mathrm{rad}), 126{,}9°(2{,}214\ \mathrm{rad})}$ és $\underline{36{,}87°\ (0{,}6435\ rad)}$	1 pont	Akkor adható, ha a versenyző világos összefoglaló választ ad.
Összesen:	**12 pont**	

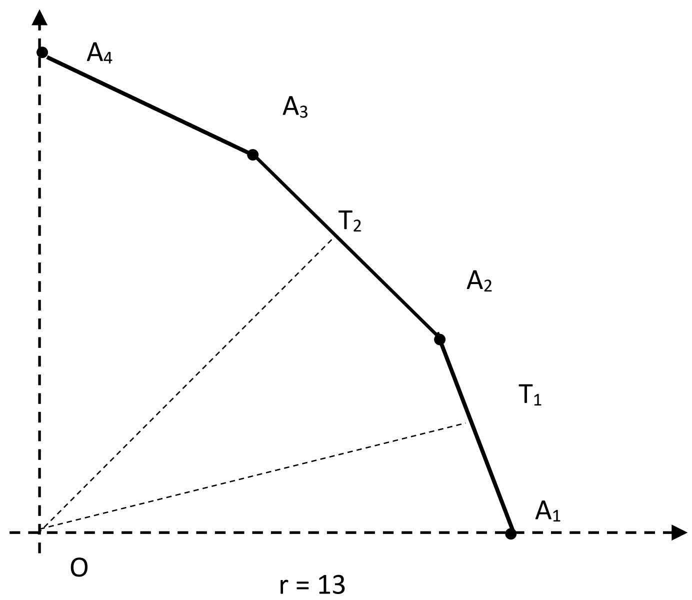
G-Sz 4. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Vezessünk be 3^x helyett új változót: $a := 3^x$	3 pont	Bármilyen, a megoldás irányába

A hatványozás azonosságait kihasználva ekkor a következő egyenletet kapjuk: $$a^3 < 6a^2 + 27a$$		mutató *jelentős* egyszerűsítésért jár a 3 pont. Kisebb számolási hiba esetén (ha a feladat nem lesz egyszerűbb) 1 pontot vonunk le.
Tudjuk, hogy a minden valós x-re pozitív, ezért a vele való osztás az egyenlőtlenségnek ekvivalens átalakítása. Kapjuk: $$a^2 < 6a + 27$$	1 pont	Természetesen nem jár a pont, ha a versenyző „szó nélkül” oszt a-val
Azaz: $$a^2 - 6a - 27 < 0$$ A bal oldalt szorzattá alakítva: $$(a-9)(a+3) < 0$$	2 pont	Természetesen más gondolatmenet esetén is jár a pont, ha a versenyző levezet olyan, az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget, amiből közvetlenül kiolvasható a megoldás
A bal oldali szorzat nyilván akkor és csak akkor negatív, ha az egyik tényezője negatív, a másik pozitív. Ez akkor és csak akkor következik be, ha $a \in (-3\,,9)$, illetve, mivel $a > 0$, $a \in (0,9)$	1 pont	
Visszahelyettesítve 3^x-t a helyére: $$3^x < 9$$ Ami akkor és csak akkor teljesül, ha $x < 2$	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

G-Sz 5. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
A feladat a) részére a választ legegyszerűbben a komplementer valószínűség kiszámításával adhatjuk meg. Nyilvánvaló, hogy $P(legalább\ két\ találat) = 1 - P(0\ találat) - P(1\ találat)$	1 pont	Bármilyen, a megoldás irányába mutató kiinduló lépésért adható a pont
Jelölje $p = \frac{1}{4}$ az 1 lövésből történő találati valószínűséget. Annak valószínűsége, hogy az íjász $n = 7$ lövésből egyszer sem talál, nyilván: $P(0\ találat) = (1-p)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^7$	2 pont	Általában jár a két pont, ha a versenyző legalább egy hasonló valószínűséget helyesen megad
Annak valószínűsége pedig, hogy *pontosan* egyszer talál: $P(1\ találat) = 7p(1-p)^{n-1} = 7\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6$	1 pont	Az előzővel együtt a két valószínűségért (vagy ezzel ekvivalens eredményért) összesen 3 pont. Számítási hibákért a súlyosságtól

		függően 1-2 pont levonás.
A keresett valószínűség tehát $P(legalább\ két\ találat) = 1 - P(0\ találat) - P(1\ találat) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7 - 7\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}555$	1 pont	0,56 már elfogadható közelítő érték
A feladat b) részét is komplementer valószínűség alkalmazásával határozhatjuk meg legegyszerűbben. Legyen $E_{k,0}$ az az esemény, hogy az első k lövésből egyetlen találat sem születik. Nyilván az első olyan k-t keressük, amelyre $1 - P(E_{k,0}) \geq \frac{2}{3}$, azaz $P(E_{k,0}) < \frac{1}{3}$ A pontosság kedvéért ki kell térnünk arra a nyilvánvaló tényre, hogy a $P(E_{k,0})$ valószínűségek sz.m. fogyó sorozatot alkotnak, ami abból következik, hogy $$E_{1,0} \supset E_{2,0} \supset \cdots \supset E_{k,0} \supset E_{k+1,0} \dots$$ Ezért valóban elegendő az első olyan k-t meghatározni, amelyre $P(E_{k,0}) < \frac{1}{3}$, hiszen az ennél nagyobb k −kra is teljesül a reláció.	2 pont	A helyes kritérium megadásáért önmagában jár a 2 pont, a részletes indokláshoz ezúttal nem szükséges ragaszkodnunk, mert a szemlélet alapján nyilvánvaló tényről van szó. Ugyanennyi pontot ér, ha a versenyző bonyolultabb utat választ (pl. kiszámolja minden k-ra annak valószínűségét, hogy az első találat a k-adik próbálkozásra következik be)
Kihasználva, hogy $P(E_{k,0}) = \left(\frac{3}{4}\right)^k$, a $\left(\frac{3}{4}\right)^k < \frac{1}{3}$ egyenlőtlenség megoldását keressük.	1 pont	A fenti kiindulás + helyes egyenlőtlenség felírása összesen 3 pont.
Mindkét oldal logaritmusát véve (ami az adott feltételek mellett ekvivalens átalakítás) és a negatív előjelek miatt az egyenlőtlenség-jelet megfordítva: $$\mathrm{k}\cdot\lg\frac{3}{4} < \lg\frac{1}{3}$$ $$k > \frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{3}{4}} = 3{,}819$$	2 pont	Számítási hibáért, vagy az egyenlőtlenség fordulásának elmulasztásáért 1 pontot vonjunk le.
Azaz az íjásznak legalább 4 lövést kell leadnia ahhoz, hogy legalább $\frac{2}{3}$ valószínűséggel találja el a táblát.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

G-Sz 6. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Egy sokszöget akkor nevezünk szabályosnak, ha valamennyi oldala és valamennyi szöge azonos nagyságú.	1 pont	Akkor adható a pont, ha a szabályosság fogalmának ismerete kiderül a dolgozatból.

Jelöljük a sokszög csúcsait $A_1, A_2, \dots, A_{12}$-vel (óramutatóval ellentétes körüljárási irányban, A_1-nek tekintve a $(13; 0)$ koordinátájú csúcsot. A csúcsok koordinátái így rendre $A_1(13;0), A_2(12;5),\ A_3(5;12), A_4(0;13),\ A_5(-5;12), A_6(-12;5),$ $A_7(-13;0), A_8(-12;-5), A_9(-5;-12),\ A_{10}(0;-13),\ A_{11}(5;-12), A_{12}(12;-55)$	1 pont	
Az oldalak hossza (pl. Pitagorasz-tétel alkalmazásával) pedig: $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_5} = \overline{A_6A_7} = \overline{A_7A_8} = \overline{A_9A_{10}} = \overline{A_{10}A_{11}} = \overline{A_{12}A_1} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$, illetve $\overline{A_2A_3} = \overline{A_5A_6} = \overline{A_8A_9} = \overline{A_{11}A_{12}} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$. Látjuk, hogy az oldalak nem mind egyenlők, tehát a sokszög nem szabályos. Ezzel az a) pontot megválaszoltuk.	2 pont	Természetesen akkor is jár az eddig adható 2+2 pont, ha a versenyző bonyolultabb úton (pl. a szögek nem-egyenlőségével, megfelelő forgásszimmetria hiányával) bizonyítja az állítást.
b) A következőkben megmutatjuk, hogy a sokszögnek nincs beírt köre. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy a koordinátatengelyek felezik az A_1, A_4, A_7 és A_{10}csúcsoknál lévő szögeket és metszéspontjuk az origó. Ezért ha egyáltalán van beírt köre a sokszögnek, <u>annak középpontja csak az origó lehet</u>. A folytatáshoz tekintsük az alábbi ábrát:  	2 pont	Minden olyan gondolatmenet, ami azt igazolja, hogy az origó nem lehet a beírt kör középpontja, csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha a versenyző azt is belátja, hogy az origón kívül nincs más alkalmas jelölt.

Annak igazolásához, hogy az origó nem lehet beírt kör középpontja, elegendő belátni, hogy van két oldal, amelyektől eltérő távolságra van. Megmutatjuk, hogy pl. A_1A_2 és A_2A_3 ilyenek. Nyilvánvaló, hogy az OA_1A_2 és OA_2A_3 háromszögek egyenlő szárúak (mindkettő szárai a kör sugarai) és így a T_1, T_2 talppontokba húzott magasságvonalak merőlegesek az A_1A_2, illetve A_2A_3 oldalakra és felezik azokat. A fentiek alapján elegendő belátni, hogy $OT_1 \neq OT_2$. Az OA_1T_1derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével $OT_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{A_1A_2}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - \frac{13}{2}} = 5\sqrt{\frac{13}{2}} \approx 12{,}75$ Hasonlóan: $OT_2 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{A_2A_3}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - \frac{49}{2}} = 17\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 12{,}02$ Világos, hogy $OT_1 \neq OT_2$, tehát a sokszögnek nincs beírt köre.	3 pont	
c) A terület kiszámításához felhasználjuk a korábbi számításokat. Vegyük észre, hogy a sokszög az OA_isugarak mentén összesen kétféle háromszögre bontható: 8 darab háromszög az OA_1A_2 , négy darab pedig az OA_2A_3háromszöggel egybevágó. Így a 12-szög területére: $$T = 8T_{OA_1A_2} + 4T_{OA_2A_3}$$ Behelyettesítve a korábbi adatokat: $T = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \sqrt{26} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 17\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7\sqrt{2} = 260 + 238 = 498$ A sokszög területe $T = 498$ egység.	3 pont	
Összesen:	**12 pont**	

G 7. Csak gimnazistáknak

Nyilvánvaló, hogy a bal oldal nemnegatív, ezért $L < 0$ esetén az egyenletnek nincs gyöke. A továbbiakban külön említés nélkül feltesszük, hogy $L \geq 0$	1 pont	
Vegyük észre továbbá, hogy a bal oldal eltérően viselkedik, amikor a K paraméter negatív, illetve nemnegatív. Ezért a továbbiakban szétválasztjuk a $K < 0$, illetve $K \geq 0$ eseteket.	1 pont	
a) eset: Legyen először tehát $K \geq 0$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\left\|\,\|x\| + K\right\| = \|x\| + K$ Egyenletünk tehát ekkor $\|x\| = L - K$ alakú, aminek	3 pont	

<table>
<tr><td>a1) nincs gyöke, ha $L < K$,
a2) $x = 0$ az egyetlen gyöke, ha $L = K$
a3) két különböző gyöke $x = K - L$ és $x = L - K$, ha $L > K$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b) eset: legyen most $K < 0$. Ekkor a gyököket összetettebb esetszétválasztással kaphatjuk meg, x, illetve $|x| + K$: előjele szerint.</td><td rowspan="5">6 pont</td><td rowspan="5">A bonyolultabb esetvalamennyi ágának helyes megoldásáért összesen 6 pont adható. Kisebb számolási hibákért 1-1 pontot vonjunk le, ugyanígy járjunk el akkor is, ha a versenyző elfelejti ellenőrizni az egyes esetek belépő feltételeinek teljesülését.</td></tr>
<tr><td>b1) Legyen először $x < K$. $K < 0$ miatt ekkor x negatív. A feltételek figyelembe vételével, az abszolút érték jelek felbontása után az alábbi egyenletet kapjuk:
$-x + K = L$, aminek gyöke $\underline{x = K - L}$. Figyelembe véve, hogy K negatív, L pedig 0 vagy pozitív, a gyök akkor fogadható el, ha $L > 0$ ($L = 0$ esetén ui. nem teljesül az $x < K$ feltétel).</td></tr>
<tr><td>b2) Legyen most $K \leq x < 0$. Ekkor az abszolút érték jeleket elhagyva:
$x - K = L$, aminek gyöke $x = K + L$. A gyök akkor fogadható el, ha teljesülnek a $K \leq K + L < 0$ feltételek. A bal oldal $L \geq 0$ miatt teljesül, a jobb oldal csak akkor, ha $L < -K$.
Kapjuk: negatív K esetén, ha $\underline{L < -K}$<u>, akkor</u> $\underline{x = K + L}$ <u>gyök</u>.</td></tr>
<tr><td>b3) Legyen $0 \leq x < -K$. Az abszolút érték jel felbontása után ekkor az egyenlet
$-x - K = L$, vagyis $x = -K - L$. A gyök akkor fogadható el, ha teljesül $0 \leq -K - L < -K$. A bal oldal akkor teljesül, ha $L \leq -K$, a jobb oldal pedig akkor, ha $L > 0$.
Azaz: negatív K-ra és $\underline{0 < L \leq -K}$<u>-ra</u> $\underline{x = -K - L}$ <u>gyök</u>.</td></tr>
<tr><td>b4) Legyen végül $x \geq -K$. Ekkor az abszolút érték jelek elhagyhatók és az egyenlet:
$x + K = L$, $\underline{x = L - K}$. Figyelembe véve, hogy $L \geq 0$, ez mindig gyök.</td></tr>
<tr><td>Összefoglalva:
$K \geq 0$ esetén nincs gyök, ha $L < K$, $x = 0$ az egyetlen gyök, ha $L = K$ és $x = \pm(K - L)$ a gyökök, ha $L > K$
$K < 0$ esetén
nincs gyök, ha $L < 0$
$x = \pm K$ a gyökök, ha $L = 0$
négy gyöke van az egyenletnek, ha $0 < L < -K$, ezek $x = \pm(K - L)$ és $x = \pm(K + L)$
három gyök van, ha $L = -K$, nevezetesen $x = \pm(K - L)$ és $x = 0$
$x = \pm(K - L)$ a két gyök, ha $L > -K$</td><td>2 pont</td><td>Ezt a 3 pontot csak akkor adjuk, ha a versenyző világosan összefoglalja a választ.</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>13 pont</td><td></td></tr>
</table>

G 8. <u>**Csak gimnazistáknak**</u>

Nyilván nem sértjük az általánosságot, ha feltesszük, hogy $k \geq l$. Emeljünk ki az összegből p^l-t és vizsgáljuk a $$p^l(p^{k-l}+1)$$ szorzatot. Vezessük be az $U = p^l$, $V = (p^{k-l}+1)$ jelöléseket.	2 pont	
U egy páratlan prím hatványa, tehát mindenképpen páratlan (ide értve az $l = 0$ esetet is). Ha $k = l$, akkor V =2. A szorzat ekkor nem lehet négyzetszám, hiszen a 2-es prímtényezőt páratlan kitevővel tartalmazza. A továbbiakban feltesszük, hogy $k > l \geq 0$	2 pont	
Belátjuk, hogy U-nak és V-nek nincs közös prímosztója. Valóban, ha $l = 0$, akkor az első tényező 1, tehát U-t semmilyen prím nem osztja. Ha $l > 0$ (és $k > l$), akkor pedig U p-nek pozitív kitevős hatványa, tehát az egyetlen prímosztója p. Ugyanekkor V 1-gyel nagyobb p valamely hatványánál, tehát semmiképp nem osztható p-vel. Kapjuk tehát, hogy a U és V relatív prímek.	2 pont	
A szorzat tehát csak akkor lehet négyzetszám, ha U és V külön-külön is négyzetszám. Az első tényező esetében ez lehetséges, ha l páros.	1 pont	Az eddig adható 7 pont akkor is jár a versenyzőnek, ha más úton jut erre a következtetésre (természetesen kellő indoklással), vagy hasonló jelentős előrehaladást ér el.
Megmutatjuk, hogy amennyiben $p > 3$ prím, akkor V nem lehet négyzetszám. Tegyük föl, hogy mégis az: $$p^{k-l}+1 = M^2$$ Ekkor $$p^{k-l} = M^2 - 1 = (M-1)(M+1)$$ A jobb oldal két tényezőjének különbsége 2, vagyis a páratlan prímosztóik különböznek. A bal oldal viszont csak p-vel osztható, ami másképp nem állhat elő, csak ha $M - 1 = 1$, $M + 1 = 3$, $p^{k-l} = 3$, $p = 3$, ami ellentmond a kiinduló feltételnek. Kapjuk tehát, hogy az adott feltételek mellett V nem lehet négyzetszám, így UV, vagyis $p^k + p^l$sem az.	3 pont	
Összesen:	**10 pont**	