Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2015. március 30.

A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

Feladatok <u>csak szakközépiskolásoknak</u>

Sz 1.

A C csúcs értelemszerűen az AB oldal felező merőlegesén (ami egyben a háromszög szimmetriatengelye) található

(1 pont)

Az AB oldal felezőpontjának koordinátái: F(4;3)

(1 pont)

Ezért az AB felező merőlegesének egyenlete: y= -x+7

(2 pont)

A C csúcs koordinátái x=0 miatt: C(0; 7)

(1 pont)

A háromszög magassága (azaz a CF hossza) $3\sqrt{2}$

(1 pont)

Tehát a terület 12 egység, a szárak $\sqrt{26}$, az alap pedig $4\sqrt{2}$ hosszúak.

(1 pont)

Sz 2.

Keressük a legkisebb olyan n számot, amelyre $1{,}06^n \geq\ 1{,}03^n \times 1{,}3$

(3 pont)

Átrendezve és minkét oldal logaritmusát véve: $n\ (\lg 1{,}06 -\ \lg 1{,}03) \geq\ \lg 1{,}3$

(2 pont)

A kijelölt műveletek elvégzése után $n \geq 9{,}138$, tehát a B ország a 10. évben fogja utolérni A-t

(1 pont)

Feladatok szakközépiskolásoknak és gimnazistáknak

G-Sz 3.

A függvény mindig értelmezett, amikor a nevező 0-tól különbözik, ezért az értelmezési tartomány: $\mathbf{ÉT} = \boldsymbol{R} \setminus \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

(2 pont)

Az értékkészlet megállapításához külön-külön megvizsgáljuk az értelmezési tartomány szakaszait:

a) a $(-\infty; 2\,)$ és $(3;\ \infty)$ intervallumokon a nevező minden pozitív valós értéket felvesz. Ennek indoklása: az $x^2 - 5x + 6 = K$ egyenletnek minden pozitív K-ra van megoldása mindkét intervallumon.
b) Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy az $x^2 - 5x + 6 = K$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása a $(2; 3\,)$intervallumon, amikor $0 > K \geq\ -0{,}25$. Ebből következik, hogy a tört értékkészlete a $(2; 3)$intervallumon $(-\infty;\ -4)$

Összesítve tehát, **a függvény értékkészlete:** $(\mathbf{0};\ \infty) \cup (-\infty;\ -\mathbf{4})$.

(3 pont)

Mivel az $\frac{1}{x^2-5x+6} = 0$ egyenletnek nyilvánvalóan nincs valós gyöke, a függvénynek **zéróhelye nincs**.

(1 pont)

A monotonitás meghatározásához szintén a nevezőt vizsgáljuk az ÉT egyes szakaszain:

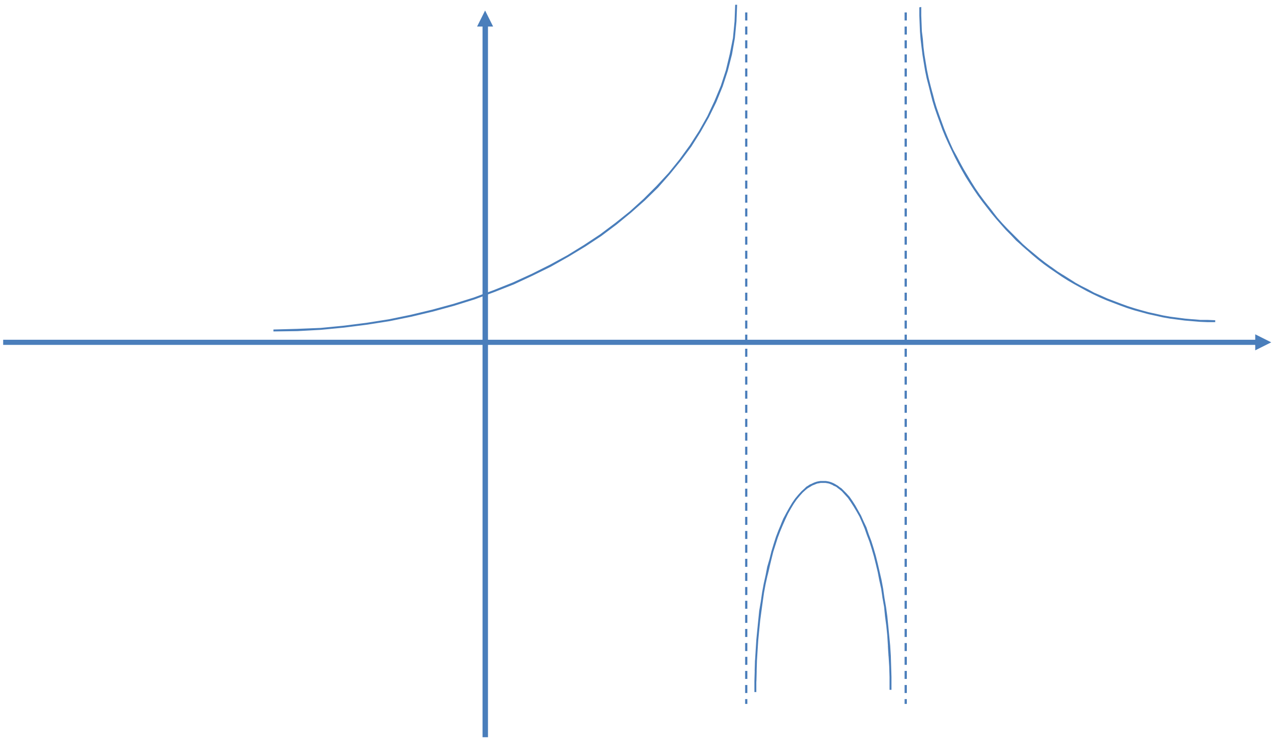
a) a $(-\infty; 2\,)$ intervallumon a nevező sz.m. csökken, ezért itt a **függvény sz.m. növekszik**
b) a $(2; 3\,)$ intervallumon a nevező x=2,5-ig sz.m. csökken, utána sz.m. növekszik, ezért a $(\mathbf{2};\mathbf{2{,}5}]$ **intervallumon a függvény sz.m nő, a** $[\mathbf{2{,}5};\mathbf{3})$ **intervallumon pedig sz.m. csökken**
c) a $(3; \infty\,)$ intervallumon a nevező sz.m. nő, ezért itt a **függvény sz.m. csökken**

(3 pont)

A fenti gondolatmenetből következik, hogy a függvénynek x=2,5-nél lokális maximuma van, globális szélsőértéke pedig nincs.

(2 pont)

A függvény grafikonját az alábbi ábra szemlélteti:



(2 pont)

G-Sz 4.

Jelöljük a pálya sarkait $S_{1,\dots}S_4$-gyel, a világítótesteket $V_{1,\dots}V_4$-gyel, T pedig legyen az S_1S_2 alapvonalhoz közelebbi büntetőpont, ahol a játékos áll. Jelölje F a játékos fejét.

Világos, hogy a V_1, S_1, T *és* F pontok egy síkba esnek és egy trapézt alkotnak. Hosszabbítsuk meg a trapéz V_1F szárát a pálya síkjáig, legyen a pálya síkjával alkotott metszéspont M_1. Nyilvánvaló, az $M_1TF_\Delta \cong M_1S_1V_{1_\Delta}$ háromszögek hasonlósága. A játékos egyik árnyéka az M_1T szakasz. A hasonlóságot kihasználva, a bennünket érdeklő M_1T szakaszt x-szel jelölve, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{x}{FT} = \frac{x + TS_1}{S_1V_1}$$

(3 pont)

A fenti egyenletben $FT = 1{,}9$ a játékos magassága, S_1V_1 a büntetőpont és a szögletzászló távolsága, $TS_1 = 40$ pedig a világítótest magassága. Az S_1V_1 távolság a Pitagorasz-tétel alapján: $S_1V_1 = \sqrt{11^2 + 34^2 =}$ 35,74 (minden adatot méterben adtunk meg). Az egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{x}{1{,}9} = \frac{x + 35{,}74}{40}$$

(2 pont)

Az egyenlet megoldása $x = 1{,}782$ méter. Világos, hogy szimmetria-okok miatt a V_2világítótest is ugyanekkora árnyékot fog vetni.

(1 pont)

Hasonló gondolatmenetet alkalmazunk a pálya másik (távolabbi) alapvonala fölött elhelyezett két világítótest árnyékaira is. Tekintsük a a $V_3, S_{1,}T$ $és$ F pontok által alkotott trapézt és hosszabbítsuk meg a V_3F szárát, legyen M_3 a pálya síkjával alkotott metszéspont. A keresett árnyék hossza az M_3T szakasz, ezt y-nal jelölve és az $M_3TF_\Delta \cong M_3S_3V_{3_\Delta}$ hasonlóságot kihasználva:

$$\frac{y}{FT} = \frac{y + TS_3}{S_3V_3}$$

(2 pont)

A Pitagorasz-tétel alapján: $S_3V_3 = \sqrt{94^2 + 34^2 =} 99{,}96$. A fenti egyenletbe helyettesítve, majd az egyenletet megoldva:

$$\frac{y}{1{,}9} = \frac{y + 99{,}96}{40}$$

$$y = 4{,}985$$

(1 pont)

A négy árnyék hossza összesen így $\mathbf{2(x + y) = 13,53}$

(1 pont)

G-Sz 5.

Legyenek a parallelogramma csúcsai (a szokásos körüljárásban) A, B, C, D az átlók metszéspontja pedig O. Ismert, hogy a parallelogramma átlói felezik egymást, így $|OB| = 1, |OC| = 3$, a BOC szög pedig 60 fokos.

(1 pont)

Írjuk fel a BOC_Δ háromszögre a koszinusz-tételt:

$$|BC|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 - 2|OB||OC| \cos 60° = 7$$

amiből $|BC| = \sqrt{7}$

(2 pont)

Hasonló eljárást alkalmazva a másik oldalra: $|AB| = \sqrt{13}$

(2 pont)

Az oldalak által bezárt szöget az ABC háromszögre felírt koszinusz-tétel segítségével határozhatjuk meg. Az B csúcsnál lévő szöget β-val jelölve:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos\beta,$$

(1 pont)

amiből $\cos\beta = -\frac{8\sqrt{7}\sqrt{13}}{91} = -0{,}8386$, $\beta = 147{,}0°$ (2,566 radián).

Összefoglalva: Az oldalak $\sqrt{7}$ és $\sqrt{13}$ egység hosszúak. A szögek 33,00 és 147,00 fokosak (radiánban 0,5760 és 2,566).

(1 pont)

G-Sz 6.

Az osztók számának kiszámítása érdekében először meghatározzuk $2^{24} - 1$ prímfelbontását. Ennek érdekében kihasználunk három nevezetes azonosságot: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, továbbá $a^3 \pm b^3 = (a-b)(a^2 \mp ab + b^2)$

A fenti azonosságokat alkalmazva:

$$\begin{aligned} 2^{24} - 1 &= (2^{12} - 1)(2^{12} + 1) = (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1) \\ &= 7 \times 3^2 \times 5 \times 13 \times 17 \times 241 \end{aligned}$$

(4 pont)

A prímfelbontás alapján látható, hogy egy szám akkor és csak akkor lesz $2^{24} - 1$ osztója, ha felírható

$$3^{\alpha_1} \times 7^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times 13^{\alpha_4} \times 17^{\alpha_5} \times 241^{\alpha_6}$$

alakban, ahol $\alpha_1 \in \{0, 1, 2\}, \alpha_2, \dots, \alpha_6 \in \{0, 1\}$. Nyilvánvaló, hogy az $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ kitevő-sorozat bármely két különböző értéke különböző osztót határoz meg, hiszen két természetes szám pontosan akkor különbözik, ha prímfelbontásuk különbözik. Ezért az osztók száma egyezni fog az összes különböző $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ sorozatok számával. Tekintettel arra, hogy (egymástól függetlenül) α_1 3, $\alpha_2, \dots, \alpha_6$ mindegyike pedig 2 féle értéket vehet föl, az osztók száma $3 \times 2^5 = 96$

(4 pont)

Feladatok csak gimnazistáknak

G 7. Feltesszük, hogy van olyan kör, ami átmegy a $P(p_x; p_y)$ és $Q(q_x; q_y)$ rácspontokon. Írjuk fel a PQ húr felező merőlegesének egyenletét, ami köztudottan átmegy a kör középpontján. Mivel a rácspontok koordinátái egész számok, a kapott egyenlet (átrendezés és egyszerűsítés után) $kx + ly + m = 0$ alakú lenne, valamilyen k, l, m egész számokra. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

(4 pont)

Helyettesítsük be az egyenletbe a középpont koordinátáit: $k\sqrt{2} + l\frac{1}{3} + m = 0$. Tegyük föl először, hogy $k \neq 0$. Ekkor kapjuk, hogy $\sqrt{2} = \frac{l+3m}{3k}$, ami ellentmondás, hiszen a jobb oldal számlálója és nevezője is egész, amiből az következne, hogy $\sqrt{2}$ racionális.

(3 pont)

Hátra van még a $k = 0$ eset. Ekkor a húr felező merőlegesének egyenlete $y = \frac{1}{3}$, azaz a PQ húr párhuzamos az y tengellyel. A felező merőleges a két pont y koordinátáinak számtani közepénél haladna, azaz $\frac{p_y+q_y}{2} = \frac{1}{3}$-nak kellene teljesülnie, ami nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen p_y, q_y egészek.

(3 pont)

G 8.

A bal oldal akkor és csak akkor értelmezett, ha x>1.

(1 pont)

A logaritmus azonosságait kihasználva a bal oldal

$$\log_3 \frac{\log_2 4x^2}{\log_2 x}$$

(3 pont)

alakra hozható, így a logaritmus definícióját alkalmazva az egyenlet az alábbival ekvivalens:

$$\frac{\log_2 4x^2}{\log_2 x} = 3$$

Tovább alakítva:

$$\log_2 4x^2 = 3\log_2 x = \log_2 x^3$$

Ebből a $4x^2 = x^3$egyenlet adódik, aminek gyökei $x = 0$ $és$ $x = 4$

x=0 nem gyöke az eredeti egyenletnek, **az eredeti egyenlet egyetlen megoldása x=4.**

(4 pont)