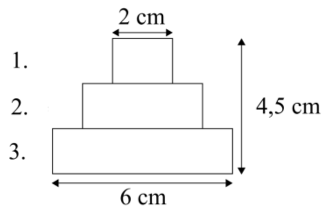
1. Tekintse az oldalsó ábrát!
    a. Mekkora lesz a 4. sor téglalap mérete?
    b. Számítsa ki az ábrán látható három téglalap területösszegét!
    c. Mekkora lesz a 2018. sorban a téglalap oldalai?
    d. Hány téglalapot kell még az ábrába rajzolni, hogy a felismert szabály szerint a téglalapok területösszege elérje a $84\ cm^2$ -t?



a. Az ábra alapján és a szimmetria miatt egy oldali lépésköz: $\dfrac{\dfrac{6-2}{2}}{2}=1$ cm. A magasság $\dfrac{4,5}{3}=1,5$ cm. Ezek alapján 8 és 1,5 cm lesz.

(2 pont)

b. $T=1,5\cdot 2+1,5\cdot 4+1,5\cdot 6=18\ \text{cm}^2$

(2 pont)

c. Tekintve hogy soronként 2 cm-rel nő a hossz, ezért az oldalhossz $2\cdot 2018=4036$ cm és a magasság állandó 1,5 cm.

(2 pont)

d. A „b” részben leírt területszámítás alapján a 1,5 és a 2-es kiemelhető. Így $1,5\cdot 2\cdot(1+2+3+\cdots)=84$ részletösszeget kell vizsgálni, hogy mikor éri el a 84-et. Azaz az $1+2+3+\cdots=28$. Ez pedig 7-nél következik be. Tehát még négyet kell berajzolni.

(2 pont)

2. Oldja meg a $\sqrt{\left(\frac{3}{2}x-3\right)^2}=\frac{1}{2}x+1$ egyenletet!

Az abszolút négyzetre emelés miatt az gyök alatt nem lesz negatív, viszont jobb oldalra ki kell kötni, hogy az nem lehet negatív. Így $x\geq -2$ lehet csak a megoldás

(2 pont)

Egyszerűsítsük a gyökös baloldalt.

$$\left|\frac{3}{2}x-3\right|=\frac{1}{2}x+1$$

(2 pont)

Az abszolút érték definíciója miatt ha $\frac{3}{2}x-3\geq 0$, azaz $x\geq 2$, akkor az abszolút érték elhagyható.

$\frac{3}{2}x-3=\frac{1}{2}x+1$, amiből $x=4$. És ez megfelel a kikötésnek.

(3 pont)

Ha $\frac{3}{2}x-3<0$, azaz $x<2$, akkor elhagyható, de negatív előjelet kap a kifejezés.

$-\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{1}{2}x+1$, amiből $x=1$. És ez is megfelel a kikötésnek.

(3 pont)

3. Az Akimu galaxis Atori bolygója körül három nap kering, Beln, Cerd, és Darph. Az időt Engs-ben mérik, ami körülbelül 7,5 földi évnek fel meg. Atori bolygón ugyanúgy van napfogyatkozás mint nálunk. A Beln három Engsként, a Cerd négy Engsként, és a Darph tizenegy Engsként. Időszámításuk szerint 3674 Engstől kezdték feljegyezni a nagyfogyatkozásokat. A Beln első napfogyatkozása 3675-ben, Cerdnek 3676 Engsben, és a Darphé épp 3674-ben volt. Most 4797-et írnak.
    a. Hány olyan esztendő volt 3674 óta 4797-ig, amikor volt napfogyatkozás?
    b. Ha ők most 4797 Engset írnak, mi pedig 2018 évet, akkor a földi időszámításunk szerint, ők mikortól kezdték rögzíteni a napfogyatkozásokat?

„a" rész

A feltételek szerint mindegyik megadott év 3-mal, 4-egy és 11-gyel osztható számok.

Alkalmazzuk a logikai szitát!

Hárommal osztható számok darabszám egészrész függvényt használva az adott intervallumra:

$$\left\lfloor \frac{4797}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3674}{3} \right\rfloor = 375$$

(2 pont)

Néggyel oszthatók: $\left\lfloor \frac{4797}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3674}{4} \right\rfloor = 281$, Tizeneggyel osztható: $\left\lfloor \frac{4797}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3674}{11} \right\rfloor = 102$.
Viszont mivel a 4797 osztható 11-gyel ezért ezt a számot növelni kell 1-gyel.

(3 pont)

Ugyanezt a logikát követve:

12-vel oszthatóak száma: 93, 33-gyel oszthatóak száma: 34, 44-gyel oszthatóak száma: 26.

132-vel oszthatóak száma pedig: 9.

(4 pont)

A logikai szita alapján a napfogyatkozások száma: 375+281+103-93-34-26+9=615 Engs.

(3 pont)

„b" rész

Mivel egy Engs 7,5 év és most 4797-et írnak, ezért 4797-et meg kell szorozni 7,5-el. Így 35977,5-et kell visszaszámolni 2018-tól. Ami i.e -33959,5-nek felel meg.

(3 pont)

4. A négyütemű autók kenését a motorteknőben található olaj biztosítja, amit megadott km-ként cserélni kell. Az olaj elhasználódását a megközelítőleg az alábbi függvény írja le a $[0;25]$ intervallumon: $f(x)=\frac{60}{x-30}+12$. Az x tengely a megtett út ezer km-ben mérve, az y tengely az olaj elhasználódását jelenti tízes beosztásban százalékosan. Tehát 0 km-nél épp 100%-kon áll. Azaz $f(0)=10$.
   a. A gyári olajcserét a szervizek 16 ezer km-re teszik, ekkor mennyi az olaj elhasználódottsága százalékban?
   b. Szakemberek azt ajánlják, ha a legjobbat szeretnénk tenni az autónk motorjával, mert hosszútávra tervezünk és a pénztárcánkat, valamint a környezetet is óvni szeretnénk, akkor a motorolaj-csereperiódust a gyárilag előírt maximális futásteljesítményhez képest nagyjából 20%-kal csökkentsük. Ekkor hány %-os az olaj elhasználódottsága?
   c. Azt a pontot, amikor az olaj elhasználodottsága eléri az 50%-ot, letörési pontnak nevezik. Ezt a pontot már nem szabad elérni, mert gyorsan károsodik a motor, hiszen az olaj már nem látja el kenési funkcióját. Ez jelen esetben hány km-t jelent?

(Forrás: https://totalcar.hu/)

„a" rész

számítsuk ki az $f(x)$ -et $x=16$ -ra. $f(16)=\frac{60}{16-30}+12=7,7$, Azaz kb 77%-os.

(3 pont)

„b" rész

16-ból vonjuk le a 20%-ot, ez 12,8 lesz. Ismét számoljuk az $f(x)$ -et $x=12,8$ -ra, ekkor 8,5-öt, kb 85% elhasználódottságot kapunk.

(4 pont)

„c" rész

Számítsuk ki a $5=\frac{60}{x-30}+12$ -ből az x-et. A rendezés után $x=21,42$

(5 pont)

5. Van egy 3x3-as bűvös négyzetünk, melynek celláiban egymástól különböző egész számok találhatóak. Ha sorokban vagy az oszlopokban összeadjuk a számokat, akkor mindig ugyanannyit kapunk. Julcsi is készített egy ilyen négyzetet, amelyben a számok összege mind a sorokban, mind az oszlopokban ugyanannyi. Sajnos azonban a billentyűzete elromlott, mert volt egy, de csak egy olyan számbillentyű, amit ha leütött, egy másik szám jelent meg.

9	11	10
18	17	6
14	11	15

Melyik billentyűzet romlott el, mit írt helyette, mi lett volna az egyforma sor és oszlop összeg? Írja Julcsi helyes táblázatát!

Amit először vegyünk észre, hogy a 11 kétszer is szerepel a táblázatban, ami feltétel szerint nem lehet, hiszen minden szám különböző. Ebből kifolyólag a tönkrement billentyű 1-est ír.

(2 pont)

Amit vegyünk észre, hogy számok között nem szerepel a 2-es és a 3-mas, így ezek közül romlott el valamelyik.

(2 pont)

Nézzük a sorösszegeket:

9	11	10	**30**
18	17	6	**41**
14	11	15	**40**
41	**39**	**31**	

Mivel mindhárom sorban különböző összegek vannak, ezért biztos, hogy legalább két sorban egy-egy cellában rossz eredmény van.

(3 pont)

A középső sorban a számok összege 41. Mivel az előbb elmondottak alapján egy 1-es számjegy nem az egyest jelenti, de az egyes helyi értéken álló számjegyek jók, így a sor összegnek a vége 1 kell legyen. Ebből kifolyólag a többi másik két sornak is 1-re kell végződjön.

(3 pont)

Az első sorban az összeg 30, de 1-re kell végződjön. Mivel a 2-es billentyű lehet hibás, ezért ebben a sorban 11 helyére 12-t írunk, így az összeg 31. Hasonlóan a harmadik sorban is.

(2 pont)

9	12	10	**31**
28	17	6	**51**
14	12	15	**41**
51	**41**	**31**	

Viszont két azonos szám nem lehet a táblázatban, ezért az egyik 12-t 22-re cseréljük. Ebben az esetben a középső oszlop összege 51 lesz.

(2 pont)

Innen már látható, hogy az elérendő cél az 51. Ha a felső cserélem ki 22-re, akkor már csak az első és harmadik sor, valamint a harmadik oszlop összegét kell rendeznem.

Ezt pedig úgy tudom megtenni, hogy első sor harmadik oszlopában a 1-es kicserélem 2-re, valamint a harmadik sor harmadik oszlopában a 1-es kicserélem 2-re.

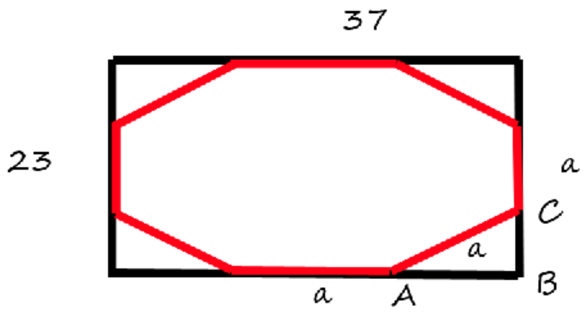
(3 pont)

Így a helyes táblázat:

9	**22**	**2**0
28	17	6
14	1**2**	**2**5

6. Egy téglalapból, amelynek oldalai 37 és 23 cm hosszúak, a sarkaiból levágunk egybevágó háromszögeket úgy, hogy egyenlő oldalú nyolcszöget kapunk. Mekkora lesz a nyolcszög kerülete, területe és szögei?

Készítsünk ábrát!



(2 pont)

Ekkor $AB = \frac{37-a}{2}, BC = \frac{23-a}{2}$

(2 pont)

Az ABC háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tétel!

$$\left(\frac{37-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{23-a}{2}\right)^2 = a^2$$

(2 pont)

Innen: $a^2 + 60a - 949 = 0$. Innen a két megoldás 13 és -73. Ebből a 13 a jó megoldás.

(4 pont)

A háromszög oldalai így: AB=12 cm és BC=5 cm.

A nyolcszög területét megkapjuk, ha téglalap területéből levonjuk a háromszögek területét.

$$T = 23 \cdot 37 - 4\frac{12 \cdot 5}{2} = 731\ cm^2$$

(4 pont)

Kerülete: $K = 8a = 8 \cdot 13 = 104\ cm^2$

(2 pont)

Az ABC háromszögben a CAB szög: $sin\alpha = \frac{5}{13} \rightarrow \alpha = 22{,}62°0$

(2 pont)

A nyolcszög szöge így 157,38 és 112,62 fok.

(2 pont)

7. Tekintsük az alábbi függvényt! $f(x)=|x-8|$. Legyen p az $f(f(f(x)))=2$ összetett függvény összes x megoldásainak az összege, q pedig a legkisebb megoldás. Számítsa ki a $p\cdot q$ -t!

Írjuk vissza egymásba az f függvényt!

$$\big||x-8|-8|-8\big|=2$$

(2 pont)

Ebből $\big||x-8|-8\big|-8=2$ vagy $\big||x-8|-8\big|-8=-2$

(2 pont)

Innen $\big||x-8|-8\big|=10$ vagy $\big||x-8|-8\big|=6$

(2 pont)

Ezt a két abszolút értékes egyenletet megoldva:
$|x-8|-8=10$ vagy $|x-8|-8=-10$ vagy $|x-8|-8=6$ vagy $|x-8|-8=-6$

(4 pont)

Ezeket rendre megoldva
$|x-8|=18$ vagy $|x-8|=-2$ vagy $|x-8|=14$ vagy $|x-8|=2$

(2 pont)

Ezeket szintén megoldva:
$x-8=18$ vagy $x-8=-18$ vagy $x-8=-2$ vagy $x-8=2$ vagy $x-8=14$ vagy $x-8=-14$ vagy $x-8=2$ vagy $x-8=-2$

(4 pont)

Amiből a végső megoldás: $x=26;\ -10; 6; 10; 22;\ -6;$

(2 pont)

A számok összege: 48 a minimuma: -10, így szorzatuk: -480

(2 pont)

8. Hány egész (a,b) megoldása van az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$ egyenletnek?

Szorozzuk be minkét oldalt a,b,2018

$2018b + 2018a = ab$

(2 pont)

Mindkét oldalból vonjuk ki ab-t és szorozzuk meg -1-gyel.

$ab - 2018a - 2018b = 0$

(2 pont)

Adjuk, mindkét oldalhoz adjunk 2018^2-t.

(4 pont)

$ab - 2018a - 2018b + 2018^2 = 2018^2$

A baloldalt alakítsuk szorzattá!

$a(b - 2018) - 2018(b - 2018) = 2018^2$

(2 pont)

$(b - 2018)(a - 2018) = 2018^2$

(2 pont)

Mivel egész megoldások kellenek, ezért a jobb oldalt is írjuk prímszámok szorzataként:

$(2018)^2 = (2 \cdot 1009) = 9^2 1009^2$

(2 pont)

Mivel csak egész megoldásokat keresünk ezért és a baloldalon egy kéttényezős szorzat van, ennek keressük az osztók számát, ami $(2 + 1)(2 + 1) = 9$

(2 pont)

Hozzá jönnek még a negatív számok is, így $2 \cdot 9 = 18$

(2 pont)

Viszont egyet ki kell venni, amikor az „a” és „b” nulla, hiszen nullával nem osztunk. Így a végső szám 17.

(2 pont)