NÉMETH LÁSZLÓ VÁROSI MATEMATIKA VERSENY 2015

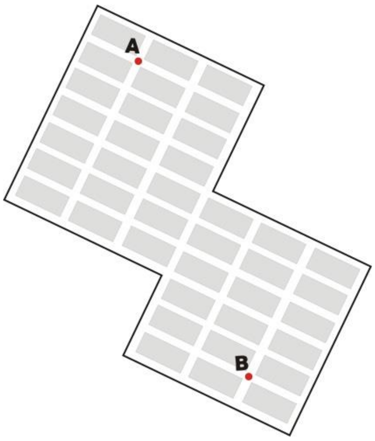
HÓDMEZŐVÁSÁRHELY

9-10. OSZTÁLY

2015. MÁRCIUS 30.

FELADATOK CSAK SZAKKÖZÉPISKOLÁSOKNAK

Sz 1. Futár Berci csomagokat szállít Erdőfalván. Most az A pontból kell eljutnia a következő csomaggal a B pontba. Hányféleképpen teheti meg, ha a lehető legrövidebb úton akar eljutni és csak az utakon közlekedhet?

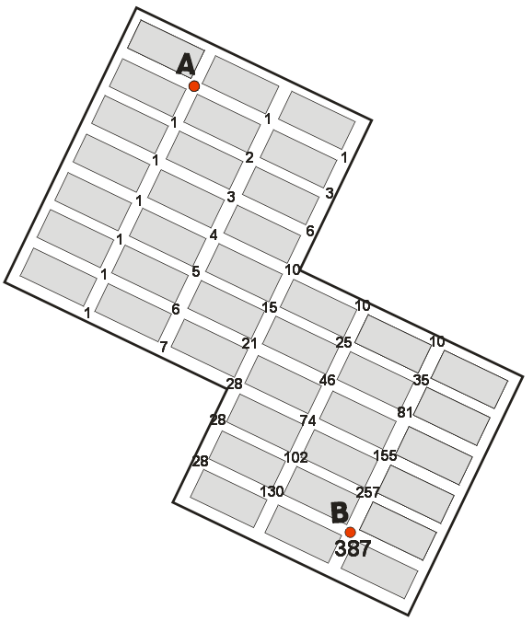


Megoldás:

A legrövidebb úton úgy tudunk menni az A-ból B-be, hogy csak rézsútosan jobbra és lefele megyünk. *(3 pont)*

Írjuk fel, hogy az egyes útkereszteződésekbe hányféleképpen tudunk eljutni. *(3 pont)*

Ezek alapján 387 féleképpen tudunk eljutni. *(3 pont)*



Sz 2. Borinak születésnapi bulija lesz, amire meghívta barátnőit. Rendelt egy hagyományos kerek születésnapi tortát is. 11 barátnője közül az egyik nem ígérte biztosra, hogy el tud jönni. Bori a vendégek megérkezése előtt szeretné felszelni a tortát. Legkevesebb hány vágást kell a tortán végezni ahhoz, hogy (Borival együtt) akár 11-en, akár 12-en lesznek, mindenkinek egyformán jusson a tortából, és ne maradjon felesleg sem? Írja le azt is, hogy a felszeletelés után, hogyan kell szétosztani 11 és 12 fő esetén a tortát!

Megoldás:

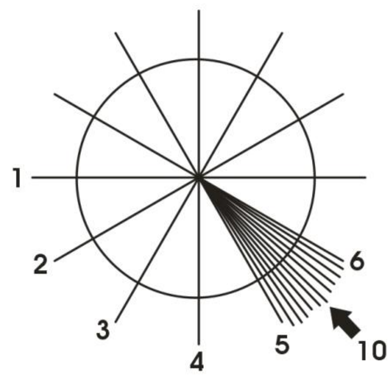
A kerek tortát először 12 részre kell vágni. *(2 pont)*

Ehhez átmérőben 6 vágást kell ejteni. Így keletkezik 12 egyforma körcikk. *(3 pont)* $(*)$

Ezután az egyik körcikket kell majd 11 részre vágni, ehhez az adott körcikken 10 vágás szükséges. *(3 pont)*

Így összesen 16 vágással lehet elérni a feladatban a kívánt célt. *(1 pont)*

Tehát, ha 12-en lesznek, akkor mindenki kap egy 30°-os körcikket. Ha pedig csak 11-en, akkor 12. felszeletelt körcikkből kapnak egy $\frac{30°}{11}$ .es körcikket. *(3 pont)*



Ha valaki a 12 körcikk felszeleteléséhez 12 vágást ír, és a továbbiakban az utolsó körcikk felszeletelését 10 vágással végzi el, akkor a $(*)$ pontszámot nem kaphatja meg.

FELADATOK SZAKKÖZÉPISKOLÁSOKNAK ÉS GIMNAZISTÁKNAK

G-Sz 3. Marci minden nap Tippmixezik. Hétfőn megnyerte a tétjének a felét, azonban kedden elbukta pénzének harmadát. Szerdán 20%-ot nyert, viszont csütörtökön elbukta pénzének a negyedét. Pénteken szerencséje volt és 50 Ft híján megduplázta pénzét. Szombat reggelre 4990 Ft volt nála az egész heti játék után. Hány forinttal indult Tippmixezni?

Megoldás:

Induljuk el visszafele:

4990 Ft volt nála szombaton, ez 50 Ft híján a pénteki duplája. Tehát 5040 Ft-nak a fele volt pénteken, ami 2520 Ft. *(2 pont)*

Péntekre elbukta a pénzének a negyedét, tehát a pénteki pénze a csütörtökinek háromnegyed része. Így csütörtökön volt 3360 Ft-ja. *(2 pont)*

Ez 20%-kal több mint amennyi pénze szerdán volt. Tehát a szerdai pénzének 120%-a. Így szerdán ennek 100%-a volt meg neki. Tehát szerdán 2800 Ft-ja volt. *(2 pont)*

Szerdára azonban elbukta a pénzének a harmadát, így keddi pénzének harmadát. Tehát a szerdai pénze a keddi kétharmada, ami 4200 Ft. *(2 pont)*

Kedden viszont megnyerte hétfői tétjének a felét. Azaz a hétfői pénzének 50%-t. Így a 4200 Ft a hétfő pénzének 150%-a. Tehát hétfőn 2800 Ft-ja volt. *(2 pont)*

G-Sz 4. A zöldek szigetén igazi bőség van. Minden lakosra 200 mangó fa jut. Sajnos egyre borúsabb idők jönnek, a szárasság miatt a fák száma évente 2%-kal csökken, a lakosok száma viszont 3%-kal nő. 10 év múlva hány mangó fa fog jutni egy lakosra?

Megoldás:

Mivel minden lakosra 200 mangó fa jut, így a lakók/mangó fák aránya 1e:200e-hoz. *(2 pont)*

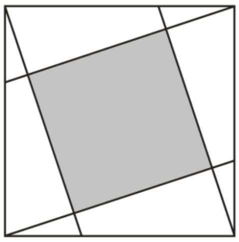
Ha a fák száma évente 2%-kal csökken, akkor évente a fák arányszáma 0,98-cal, míg a lakosok arányszáma 1,03-mal. *(2 pont)*

Tíz év elteltével a következő arány áll be: $\frac{1,03^{10} \cdot 1\text{ e}}{0,98^{10} \cdot 200\text{ e}} = \frac{1,3439\text{ e}}{163,4146\text{ e}}$. *(2 pont)*

Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy mennyi mangó fa jut egy lakosra, számlálót és a nevezőt is el kell osztani 1,3439-cel. *(3 pont)*

Így azt kapjuk, hogy 1:121,59. Ami azt jelenti, hogy kb. 121 (vagy 122) mangó fa jut egy lakosra. *(3 pont)*

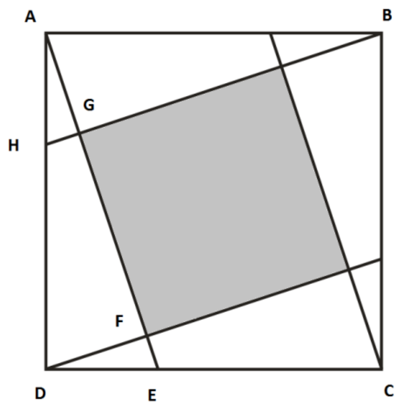
G-Sz 5. Árpi és Lajos egy osztálykirándulás során egy kastély látogatásakor az alábbi üvegablakot pillantották meg:



Az üvegablak négyzet alakú és minden oldalán a harmadoló pontok vannak összekötve a szemközti oldal csúcsaival. Lajos azt állítja, hogy a szürkére festett ablakrész pont akkora, mint a fehér részek összesen. Árpi szerint ez nem igaz. Kinek van igaza? Számítással igazolja Árpi vagy Lajos állítását!

Megoldás:

Tekintsük a négyzetet egységnyi oldalúnak, és vezessük be az alábbi jelöléseket: *(2 pont)*



Az ADE háromszögben Pitagorasz tétel alapján:

$$AD^2 + DE^2 = AE^2$$

$$1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = AE^2$$ *(2 pont)*

$\frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} = AE^2$, amiből $AE = \frac{\sqrt{10}}{3}$. *(1 pont)*

Az ADE háromszög hasonló a AFD háromszöghöz, mert $DAF\sphericalangle$ közös és mindkettőnek van egy derékszöge. Ebből adódóan $\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AF}$ *(3 pont)*

Innen $AF = \frac{3}{\sqrt{10}}$ *(1 pont)*

Mivel az AH oldal $\frac{1}{3}$, így az $AG = \frac{AF}{3} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ *(2 pont)*

Így a szürke négyzet GF oldala $\frac{2}{\sqrt{10}}$ *(1 pont)*

Azaz a szürke négyzet területe $\frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ *(1 pont)*

Mivel egységnyi oldalú négyzetben számoltuk a szürke négyzet területét, amely a $\frac{2}{5}$-ös értékével kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Így a szürke négyzet területe kisebb, mint a nagy négyzet fele, tehát Lajosnak nem volt igaza. *(3 pont)*

G-Sz 6. Feri unalmában az alábbi függvényt írta be egy függvényábrázoló programba:

$$f(x)=\Big|\underbrace{\big|\cdots\big|\big||x|-1\big|-1\big|\cdots\big|-1}_{\text{2015 db "-1" -es}}\Big|.$$

a. Hány zérushelye van ennek a függvénynek?

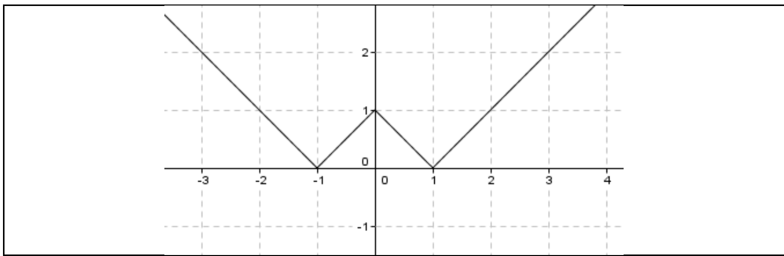
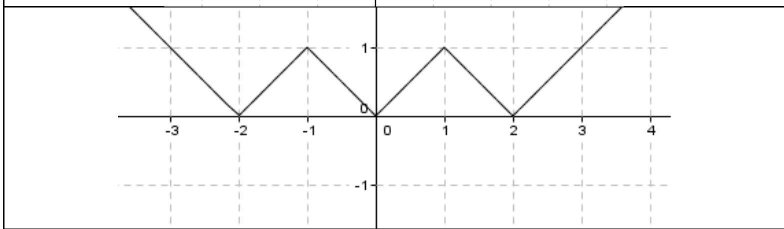
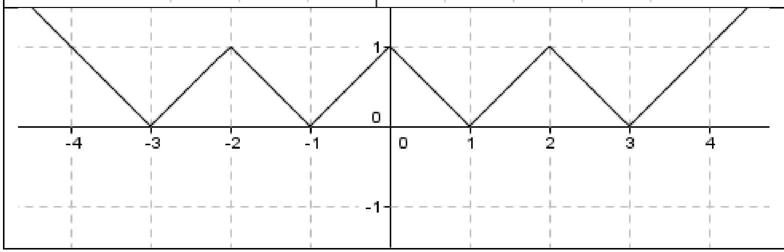
b. Ez a függvény szigorúan monoton csökken a $]-\infty;a]$ intervallumon. Mennyi az a értéke?

c. Melyik az az intervallum, ahol még szigorúan monoton csökken a függvény, de utána már csak szigorúan növekszik?

d. Cili ugyanebbe a programba beírta a $g(x)=-x^2+1$ függvényt. Hány metszéspontja lesz így az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek?

Megoldás:

Figyeljük meg, hogyan alakul az abszolút érték függvényünk a -1-ek hozzá vételével. *(3 pont)*

	$f(x)=\big\|\,\|x\|-1\big\|$ Két zérus hely
	$f(x)=\big\|\,\big\|\,\|x\|-1\big\|-1\big\|$ Három zérus hely
	$f(x)=\big\|\,\big\|\,\big\|\,\|x\|-1\big\|-1\big\|-1\big\|$ Négy zérus hely

a. A analógiát követve a 2015. db -1-es után a programban 2016 zérus hely lesz. *(2 pont)*

b. Az előbbi ábrákat figyelve megállapíthatjuk, hogy balról jobbra a függvény első emelkedése a -1-esek számának helyén lesz, az x tengely negatív részén. Így a válasz: $]-\infty;-2015]$ *(2 pont)*

c. Hasonló meggondolást követve az utolsó csökkenés $[2014;2015]$. *(2 pont)*

d. Ábrázolva a $g(x)=-x^2+1$ függvényt, a grafikonról leolvasható, hogy három metszéspontja lesz. *(3 pont)*

FELADATOK CSAK GIMNAZISTÁKNAK

G 7. Tekintsük a következő harmadfokú függvényt, ahol a, b, c valós számokat jelölnek: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, és tudjuk, hogy $f(-3) = f(-1) = f(2) = 1$. Határozza meg az $f(3)$ értéket!

Megoldás:

Mivel mindhárom helyettesítési érték egyet ad, így ha levonunk 1-et az $f(x)$-ből, akkor pont egy olyan polinomot kapunk, amelynek gyökei a fent említett számok. *(4 pont)*

Így használva a gyöktényezős alakot, azt kapjuk, hogy:

$f(x) - 1 = \alpha(x+3)(x+1)(x-2)\ (*)$ *(2 pont)*

A gyöktényezős alakot felbontva, lesz egy harmad-, másod- és egy elsőfokú tag, valamint egy konstans tag, a megfelelő α együtthatóval. *(2 pont)*

Baloldalon a konstans tag -1, jobb oldalon pedig $\alpha \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1) = -6\alpha$. Azaz $-1 = -6\alpha$,

innen $\alpha = \frac{1}{6}$ *(3 pont)*

Rendezve $(*)$ és visszahelyettesítve, azt kapjuk: $f(x) = 1 + \frac{(x+3)(x+1)(x-2)}{6}$. *(3 pont)*

Innen pedig már $x = 3$ helyettesítéssel adódik, hogy $f(3) = 5$. *(2 pont)*

Amennyiben a versenyző az x helyére történő visszahelyettesítés után helyesen határozza meg az a, b, c értéket (mint három ismeretlenes egyenletrendszer) és ezek használatával kapja meg az $x = 3$ helyettesítési értékét, úgy kapja meg a teljes pontszámot.

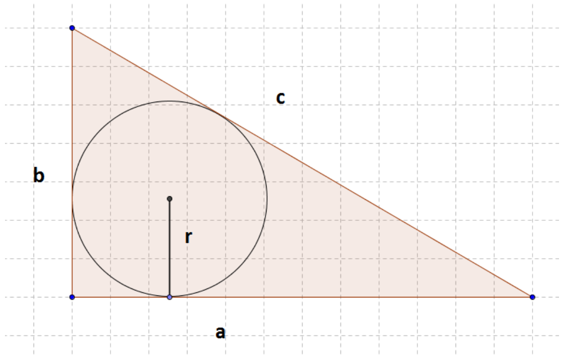
G 8. Egy derékszögű háromszög területe 100 cm^2. A háromszögbe írható kör sugara 4 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

A háromszögbe beírt kör sugara *(r)*, kerülete *(2s)*, és területe *(t)* között érvényes az alábbi összefüggés:

$t = s \cdot r = \dfrac{a+b+c}{2} \cdot r$, amelyből az alábbi ábra alapján $100 = (a+b+c) \cdot \dfrac{4}{2} = 2 \cdot (a+b+c)$.

(4 pont)



Átrendezve az egyenletet: $a+b=50-c$. Ezen egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy $a^2+b^2+2ab=2500+100c+c^2$. *(3 pont)*

Kihasználva, hogy $a^2+b^2=c^2$, valamint hogy $2ab=400$, adódik: $100c=2100$, azaz $c=21$ cm. *(3 pont)*

Az
$$\left.\begin{array}{rcl} ab &=& 200 \\ a^2+b^2 &=& 21^2 = 441 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert, úgy oldjuk meg, hogy az első egyenlet 2-szeresét egyszer hozzáadjuk a második egyenlethez, egyszer pedig levonjuk belőle: *(3 pont)*

$(a+b)^2=841$,

$(a-b)^2=41$,

vagyis

$a+b=29$,

$a-b=\sqrt{41}\approx 6,4$ *(3 pont)*

feltéve, hogy *a* jelöli a nagyobbik befogót.

Tehát $a=\dfrac{29+\sqrt{41}}{2}\approx 17,7$ cm, és $b=\dfrac{29-\sqrt{41}}{2}\approx 11,3$ cm. *(3 pont)*