

Kamatos kamat

Feladatok

Az óceánon halad egy hajó.

Egyszer csak meghibásodik a motorja.

A motor nem áll le, de a hajó óránként megtett útja óráról órára 2%-kal csökken. A hiba bekövetkezése előtti órában a hajó 50 km-t tett meg.

a) Mekkora utat tesz meg a meghibásodás utáni 1. és 28. órában?

b) Mekkora távolságra juthat el 28 óra alatt?

c) Eljuthat-e 1400 km távolságra? Mennyi idő alatt?

d) Eljuthat-e 2500 km távolságra? Mennyi idő alatt?



$$a_0 = 50 \text{ km} \quad q = 0,98$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$a) \quad a_1 = 50 \cdot 0,98 = \underline{49 \text{ km}}$$

$$a_{28} = 50 \cdot 0,98^{28} \approx \underline{28,4 \text{ km}}$$

$$b) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{28} = \underbrace{50 \cdot 0,98 + 50 \cdot 0,98^2 + \dots + 50 \cdot 0,98^{28}}_{49} = 49 \cdot \frac{0,98^{28} - 1}{0,98 - 1} \approx$$
$$\underline{\underline{1058,46 \text{ km}}} \text{ - t tesz meg 28 óra alatt.}$$

$$c) \quad 1400 = 49 \cdot \frac{0,98^n - 1}{0,98 - 1}$$

$$\frac{1400}{49} = \frac{0,98^n - 1}{-0,02}$$

$$\frac{1400 \cdot (-0,02)}{49} = 0,98^n - 1$$

$$\frac{1400 \cdot (-0,02)}{49} + 1 = 0,98^n$$

$$\frac{9}{7} = 0,98^n \quad / \lg$$

$$\lg \frac{9}{7} = \lg 0,98^n$$

$$\lg \frac{9}{7} = n \cdot \lg 0,98$$

$$\frac{\lg \frac{9}{7}}{\lg 0,98} = n$$

$$n \approx 41,94$$

↓

A 42. óra alatt jut el
1400 km távra.

$$d) 2500 = 49 \cdot \frac{0,98^n - 1}{0,98 - 1}$$

$$\frac{2500 \cdot (0,02)}{49} + 1 = 0,98^n$$

$$-\frac{1}{49} \neq 0,98^n$$

$$\text{mert } 0,98^n > 0$$

A hajó nem juthat el 2500 km távolságra.

<http://www.ementor.hu/?q=node/223>

1. feladat: Hány év alatt nő egy 200000 forintos bankbetét évi 2,7 %-os kamat mellett 700000 forintra?

2. feladat: Hány év alatt nő egy 20000 fős város lakossága évi 10,5 %-os növekedés mellett 89000 főre?

3. feladat: Hány év alatt csökken egy 90000 fős város lakossága évi 2,1 %-os fogyás mellett 17000 főre?

4. feladat: Évi hány %-os növekedés mellett gyarapodik egy 20000 fős város lakossága 8 év alatt 83000 főre?

A választ egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

5. feladat: Évi hány %-os fogyás mellett csökken egy 82000 fős város lakossága 18 év alatt 17000 főre?

A választ egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

6. feladat: Évi hány %-os kamat mellett nő egy 160000 forintos bankbetét 13 év alatt 640000 forintra?

A választ egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

7. feladat: Évi 9,4 %-os kamat mellett hány forintra nő 18 év alatt egy 120000 forintos bankbetét?

A választ egészre kerekítve add meg!

8. feladat: Évi 13,6 %-os növekedés mellett hány főre nő 10 év alatt egy 13000 fős város lakossága?

A választ egészre kerekítve add meg!

9. feladat: Évi 8,3 %-os fogyás mellett hány főre csökken 11 év alatt egy 82000 fős város lakossága?

A választ egészre kerekítve add meg!

Egy dél-afrikai őserdő faállományára évente 1,4%-kal nőtlen
Hány év múlva nőtlen a faállomány a felére?

$$q = 0,986$$

$$100\% - 1,4\% = 98,6\%$$

A faállomány: x db ($x > 0$)

$$x \cdot 0,986^n = \frac{x}{2} \quad / : x$$

$$\frac{x}{2} : x = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$0,986^n = 0,5$$

Két városban (nevezzük őket **A** és **B** városnak) 2006. január 1-én elhatározzák, hogy a buszbérlet árát hónapról hónapra emelve 2008. január 1-ig felemelik 100 fabatkáról 200 fabatkára. Ezt **A** város úgy valósította meg, hogy havonta azonos %-kal, **B** város pedig úgy, hogy havonta azonos összeggel növelte az árat.

- Hány százalékkal nőtt hónapról hónapra **A** városban a bérlet ára?
- Hány fabatkával nőtt havonta **B** városban a bérlet ára?
- Ha egy polgár minden hónapban vásárol bérletet, melyik városban költ rá többet a 24 hónap alatt?
- Hány százalékkal költ többet bérletre egy **B** városban lakó a második évben, mint az elsőben?

Megoldás:

- a) **A** városban a bérlet havi költsége a mértani sorozat szabályai szerint nő:

$$a_1(2006. \text{ jan.1-i állapot}) = 100, \quad a_{25}(2008. \text{ jan.1-i állapot}) = 200.$$

$$100 \cdot q^{24} = 200$$

$$q^{24} = 2 \quad \Rightarrow \quad q = 2^{\frac{1}{24}} \approx 1,0293,$$

tehát a növekedés havi 2,93%.

- b) **B** városban a bérlet havi költsége a számtani sorozat szabályai szerint nő:

$$b_1 = 100, \quad b_{25} = 200.$$

$$200 = 100 + 24 \cdot d$$

$$24d = 100$$

$$d = \frac{25}{6} \approx 4,17$$

Tehát a növekedés körülbelül havi 4,17 fabatka.

- c) Számítsuk ki mindkét sorozat az első 24 tagjának összegét!

$$S_A = 100 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2^{24}}\right)^{24} - 1}{\frac{1}{2^{24}} - 1} = 100 \cdot \frac{2 - 1}{\frac{1}{2^{24}} - 1} \approx 3412,71; \quad S_B = \frac{2 \cdot 100 + 23 \cdot \frac{25}{6}}{2} \cdot 24 = 3550.$$

Tehát **B** városban költenek többet bérletre két év alatt. (Grafikonunkon is látszik, hogy a kék oszlopok összmagassága nagyobb.)

A Vastag szülők gyerekük minden születésnapján 200 000 Ft-ot tesznek a bankba a gyerek 18 éves koráig évi 4%-os kamatra. Mennyit kaphat kézhez a gyerek a 18. születésnapja után?



$$t_n = t_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$$



K1 Gy 964. 10 évre vonatkozóan összehasonlították két vállalat termelését. Kezdetben az I. vállalat termelése 100 egység, a II. vállalaté 80 egységnyi volt. Az I. vállalat termelése félévenként 3%-kal nőtt, a II. vállalaté félévenként 5%-kal.

a) Utolérte-e a II. vállalat termelése az I. vállalatét? Jelenleg melyik termel többet?

b) Melyik vállalat termelt többet a 10 év alatt?

a) A jelenlegi termelések: $T_I = 100 \cdot 1,03^{20} \approx 180,6$; $T_{II} = 80 \cdot 1,05^{20} \approx 212,3$.

A II. vállalat már megelőzte az I-est a termelésben.

b) Az össztermelések: $S_I = 100 \cdot 1,03^1 + 100 \cdot 1,03^2 + \dots + 100 \cdot 1,03^{20} =$
 $= 100 \cdot 1,03 \cdot \frac{1,03^{20} - 1}{1,03 - 1} \approx 2767,6$;

$S_{II} = 80 \cdot 1,05^1 + 80 \cdot 1,05^2 + \dots + 80 \cdot 1,05^{20} = 80 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} \approx$
 $\approx 2777,5$. Az eltelt 10 év alatt a II. vállalat termelt többet.

Számtani: $b_1 + b_4 + b_{25} = 114$

$$b_1 + b_1 + 3d + b_1 + 24d = 114$$

$$3b_1 + 27d = 114$$

$$b_1 + 9d = 38$$

$$b_{10} = 38$$

$$b_1 = 38 - 9d$$

$$b_4 = 38 - 6d$$

$$b_{25} = 38 + 15d$$

Mértani: $(38 - 6d)^2 = (38 - 9d) \cdot (38 + 15d)$

$$38^2 - 456d + 36d^2 = 38^2 + 570d - 342d - 135d^2$$

$$171d^2 - 684d = 0$$

$$d^2 - 4d = 0$$

$$d \cdot (d - 4) = 0$$

1.eset

$$d_1 = 0$$

38; 38; 38; 38; ...

$$q_1 = 1$$

2.eset

$$d_2 = 4$$

2; 14; 98

$$q_2 = 7$$