

Feladatok

(Számítási sorozat és mértani sorozat egy feladatban)

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n - 1) \cdot d] \cdot n}{2}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 \cdot n$$

1. K1 Egy pozitív számokból álló számtani sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege 33. Ha a sorozat első és harmadik tagjából elveszünk 1-et, a hatodik taghoz pedig hozzáadunk 1-et, akkor e három mennyiség egy mértani sorozat három egymást követő tagja lesz. Határozzuk meg az eredeti számtani sorozat első tagját és differenciáját!

2. K1 Egy nem állandó mértani sorozat első három tagjának összege 21. E három szám tekinthető egy számtani sorozat első, második és negyedik tagjának. Adjuk meg az eredeti mértani sorozat első 6 tagját!

3. K2 Egy pozitív számokból álló nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a számtani sorozat első, harmadik és kilencedik tagjainak 10-es alapú logaritmusai egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

4. K2 Egy pozitív egészekből álló számtani sorozat első tagja 4, egy pozitív egészekből álló mértani sorozat első tagja 2. A számtani sorozat differenciája egyenlő a mértani sorozat hányadosának felével. Ha a mértani sorozat második tagjához 1-et hozzáadunk, akkor a számtani sorozat egy tagját kapjuk. Adjuk meg a két sorozat első 5-5 tagját!

1. példa Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha a második tagból 1-et elveszünk, a harmadik taghoz pedig 1-et hozzáadunk, akkor e három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja lesz. Adjuk meg az eredeti számtani sorozat első 5 tagját!

2. példa Egy nem állandó mértani sorozat első három tagjának összege 52. E három tag tekinthető egy számtani sorozat első, második és ötödik tagjának. Adjuk meg a mértani sorozat első 5 tagját!

1. K1

Egy mértani sorozat első három elemének összege 35. Ha a harmadik számot öttel csökkentjük, egy számtani sorozat első három eleméhez jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!

Mértani sorozat: a_1 a_2 a_3 összegük: 35

Számtani sorozat: a_1 a_2 $a_3 - 5$ összegük: 30

$$a_2 = \frac{30}{3} = 10$$

Mértani sorozat: $\frac{10}{q} + 10 + 10q = 35 \quad / \cdot q$

$$10 + 10q + 10q^2 = 35q$$

$$10q^2 - 25q + 10 = 0$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

1. eset:

$$q_1 = 2$$

$$M. : \quad 5 \quad 10 \quad 20$$

$$q_1 = 2$$

$$S_2. : \quad 5 \quad 10 \quad 15$$

$$d_1 = 5$$

$$M. : \quad 20 \quad 10 \quad 5$$

$$q_2 = \frac{1}{2}$$

2. eset $q_2 = \frac{1}{2}$

$$S_2. : \quad 20 \quad 10 \quad 0$$

$$d_2 = -10$$

Egy mértani sorozat első három tagjának összege 399, ez a három szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, nyolcadik és ötvenhetedik tagja. Melyik ez a három szám?

$$M. : \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \text{összeg: } 399$$

$$S2. : \quad b_1 \quad b_8 \quad b_{57} \quad \text{összeg: } 399$$

$$b_8 = b_1 + 7d$$

$$b_{57} = b_1 + 56d$$

$$b_1 + b_8 + b_{57} = 399$$

$$3b_1 + 63d = 399$$

$$b_1 + 21d = 133$$

$$b_{22} = 133$$

$$M. \quad 133 - 21d \quad 133 - 14d \quad 133 + 35d$$

$$S2. \quad 133 - 21d \quad 133 - 14d \quad 133 + 35d$$

$$(133 - 14d)^2 = (133 - 21d)(133 + 35d) \quad (HS)$$

$$133^2 - 3724d + 196d^2 = 133^2 + 4655d - 2793d - 735d^2$$

$$931d^2 - 5586d = 0$$

$$931d \cdot (d - 6) = 0$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 6$$

$$1.\text{eset: } 133 \quad 133 \quad 133$$

$$2.\text{eset: } 7 \quad 49 \quad 343$$

$$a_1 = 133 - 21 \cdot 6 = 7$$

$$a_2 = 133 - 14 \cdot 6 = 49$$

$$a_3 = 133 + 35 \cdot 6 = 343$$

2. K2

Egy számtani sorozat második eleme 7, és e sorozat első, harmadik és nyolcadik eleme egy mértani sorozat egymást követő elemei. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?

HF

$$a_2 = 7$$

$$a_1 = 7 - d$$

$$a_3 = 7 + d$$

$$a_8 = 7 + 6d$$

$$(7 + d)^2 = (7 - d) \cdot (7 + 6d)$$

$$49 + 14d + d^2 = 49 + 42d - 7d - 6d^2$$

$$7d^2 - 21d = 0$$

$$7d \cdot (d - 3) = 0$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 3$$

1.eset

7 7 7 7 7 7 7 7 7 ...

$$d_1 = 0$$

$$q_1 = 1$$

2.eset

4 7 10 13 16 19 ...

$$a_1 = 4$$

$$a_3 = 10$$

$$a_8 = 25$$

$$d_2 = 3$$

$$q_2 = 2,5$$

3. K2

Egy mértani sorozat első három elemének szorzata 216. Ha a harmadik számot 3-mal csökkentjük, egy számtani sorozat szomszédos elemeit kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!

$$M \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \text{szorzat: } 216$$

$$SZ \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 - 3$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 216$$

$$a_1 \cdot a_3 = a_2^2$$

$$a_2^3 = 216$$

$$a_2 = 6$$

$$M \quad \frac{6}{q} \quad 6 \quad 6q$$

$$SZ \quad \frac{6}{q} \quad 6 \quad 6q - 3$$

$$\frac{\frac{6}{q} + (6q - 3)}{2} = 6$$

$$\frac{6}{q} + 6q - 3 = 12 \quad | \cdot q$$

$$6 + 6q^2 - 3q = 12q$$

$$6q^2 - 15q + 6 = 0$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$q_1 = 2$$

$$q_2 = \frac{1}{2}$$

1. set

$$M. \quad 3 \quad 6 \quad 12$$

$$S2. \quad 3 \quad 6 \quad 9$$

$$q_1 = 2$$

$$d_1 = 3$$

2. set

$$M. \quad 12 \quad 6 \quad 3$$

$$S2 \quad 12 \quad 6 \quad 0$$

$$q_2 = \frac{1}{2}$$

$$d_2 = -6$$