A számtani sorozat első n tagjának az összege

TK.:43. oldal

Egy híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy **Gauss** általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét. Vajon hogyan gondolkodott?*

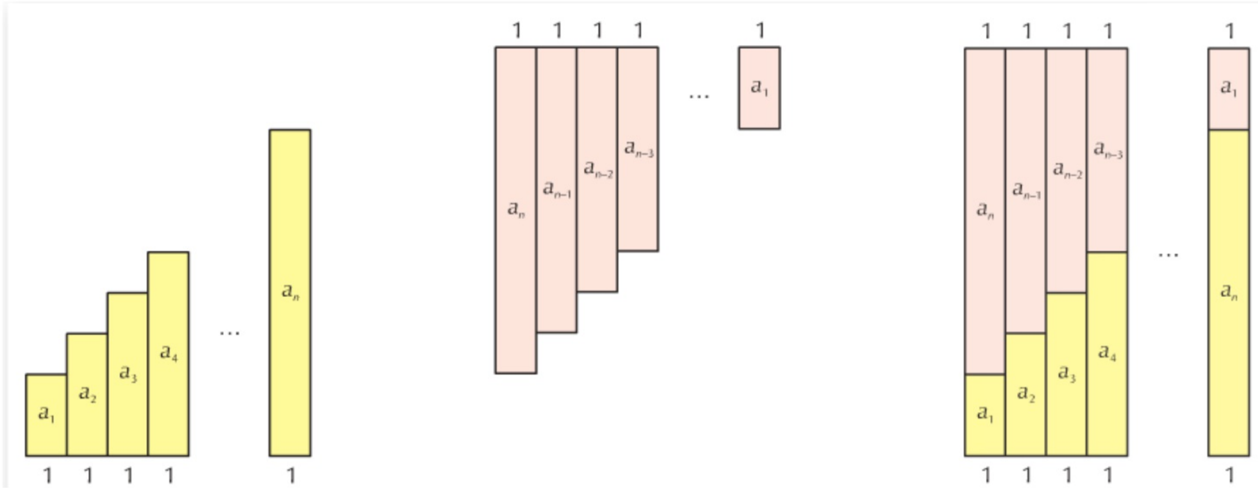
Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

http://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

$$1+2+3+\dots+99+100=A$$
$$100+99+98+\dots+2+1=A$$
$$+$$
$$101+101+101+\dots+101+101=2A$$
$$100\cdot 101=2A$$
$$\frac{100\cdot 101}{2}=A=5050$$

TK.: 43. oldal

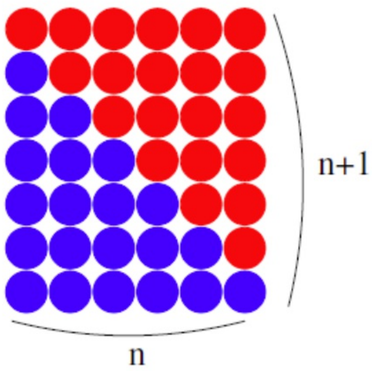
Az első n természetes szám összege: $\frac{n(n+1)}{2}$



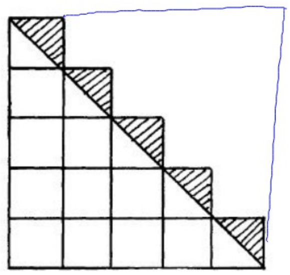
Az első n természetes szám összege:

http://realika.educatio.hu/ctrl.php/unregistered/preview/preview?userid=0&store=0&pbk=%2Fctrl.php%2Funregistered%2Fcourses&c=40&node=a60&pbka=0&savebtn=1

http://fr0ddy.github.io/math/visual-proofs/sum-of-first-n-natural-numbers.html



$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$



A számtani sorozat első n tagjának összege:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(Biz.)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1 + \cancel{d} + a_1 + 2\cancel{d} + \dots + a_1 + \cancel{(n-1)d} &= S_n \\ a_n + a_n \cancel{- d} + a_n \cancel{- 2d} + \dots + a_n \cancel{- (n-1)d} &= S_n \end{aligned}\right] +$$

$$(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = 2S_n$$

$$n \cdot (a_1 + a_n) = 2 \cdot S_n$$

$$\boxed{\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = S_n}$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} = \boxed{\frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}}$$

FGY.: 895.

$$1;\ 5;\ 9;\ \underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{13}};\ \underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{17}};\ 21;\ \dots;\ \underset{a_n}{\underset{\shortparallel}{97}} \qquad d = 4$$

$S_n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$
$$97 = 13 + (n-1)\cdot 4$$
$$97 = 13 + 4n - 4$$
$$88 = 4n$$
$$n = 22$$

$$S_{22} = \frac{22\cdot(13+97)}{2} = \underline{\underline{1210}}$$

2008. május id. - 13. feladat (3+4+5=12 pont)

Egy vállalat új termék gyártását kezdte el. Az első héten 200 darab termék készült el, a további hetekben pedig az előző hetinél mindig 3-mal több.

a) Hány ilyen terméket gyártottak az indulástól számított 15. héten?

b) Ebből a termékből összesen hány készül el egy év (52 hét) alatt, ha a termelés végig így növekszik?

c) A kezdetektől számítva legalább hány hétnek kell eltelnie, hogy a vállalat erről a termékről kijelenthesse: Az induláshoz képest megduplázódott a hetenként előállított termékek száma.

Hf. ellenőrzése

$a_1 = 200$

$d = 3$

a)

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_{15} = 200 + 14 \cdot 3 = 242$

242 terméket gyártottak a 15. héten

b)

$$S_n = \frac{n\left(2a_1 + (n-1)d\right)}{2}$$

$$S_{52} = \frac{52\left(2 \cdot 200 + 51 \cdot 3\right)}{2} = 14378$$

14378 terméket készült el 542 hét alatt.

c)

$a_1 + (n-1)d \geq 400$

$200 + (n-1) \cdot 3 \geq 400$

$(n-1) \cdot 3 \geq 200$

$$n - 1 \geq \frac{200}{3}$$

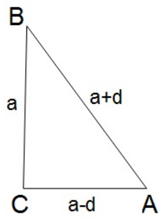
$$n \geq \frac{200}{3} + 1$$

$$\frac{200}{3} + 1 = 67,\dot{6}$$

$n \in Z^{+} \Rightarrow n \geq 68$

Legalább 68 hét múlva duplázódik meg a hetenként előállított termékek száma.

TK. 46/4



$T = 600\ cm^2$

$\frac{a \cdot (a-d)}{2} = 600$

$a \cdot (a-d) = 1200$

Pitagorasz tétele: $a^2 + (a-d)^2 = (a+d)^2$

$a^2 + a^2 - 2ad + d^2 = a^2 + 2ad + d^2$

$a^2 - 4ad = 0$

$a(a-4d) = 0 \qquad (a \neq 0)$

$a - 4d = 0$

$a = 4d$

$4d \cdot (4d - d) = 1200$

$12d^2 = 1200$

$d^2 = 100 \qquad (d \geq 0)$

$d = 10$

$a = 4d = 40cm$

$b = a - d = 40 - 10 = 30cm$

$c = a + d = 40 + 10 = 50cm$