Számsorozatok tulajdonságai és ábrázolásuk

Tagja-e a sorozatnak? (Ha igen hanyadik tagja?)

$$a_n = 2n - 3$$

a) 311

$311 = 2n - 3$

$314 = 2n$

$157 = n$ $\Rightarrow$ 311 tagja a sorozatnak

$a_{157} = 311$

b) 1190

$1190 = 2n - 3$

$1193 = 2n$

$\underbrace{596{,}5}_{\notin \mathbb{Z}^+} = n \Rightarrow$ 1190 nem tagja a sorozatnak

Sorozatok jellemzése:

Mi is volt a definíció?

a) ÉT.: (D) $\mathbb{Z}^+$

b) ÉK.: (R) $\mathbb{R}$

c) monotonitás:

a_n sorozat szig. mon. nő, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$-ra: $a_n < a_{n+1}$

a_n — " — csökken — " — : $a_n > a_{n+1}$

$a_{n+1} - a_n > 0$ szig. mon. nő

$a_{n+1} - a_n < 0$ — " —

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ szig. mon nő

Állapítsd meg a következő sorozatok monotonitását!

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

szig. mon. csökken

$$b_n = 10$$ konstanssorozat

$c_1 = -5$

$c_n = c_{n-1} + 4$ $(n \geq 2)$

$-5; -1; 3; 7; \dots$

szig. mon. nő

$$c_{n+1} - c_n = c_n + 4 - c_n = 4 > 0$$

d) korlátosság

a_n sorozat felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{Z}^+$-ra:

$$a_n \leq K$$

a_n sorozat alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{Z}^+$-ra:

$$k \leq a_n$$

a_n sorozat korlátos: $k \leq a_n \leq K$

e) periodikusság

$e_n = n$ pozitív egész szám 4-gyel való osztási maradékai

létezik olyan $p \in \mathbb{Z}^+$: $a_n = a_{n+p}$ (p a periódus)

$a_n = \frac{1}{n}$

szig. mon. csökk. $\Longrightarrow$ felülről korlátos

$$K = 1 = a_1$$

alulról korlátos $\quad k = 0 \quad$ (A 0 nem tagja a sorozatnak.)

a_n sorozat korlátos: $\underset{\substack{\shortparallel \\ k}}{0} < \frac{1}{n} \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ K}}{1}$

$f_n = (-1)^n$

$g_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$a_n = a_{n+4}$

$g_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$g_4 = 0$

A sorozat periódikus!

$1;\ 0;\ -1;\ 0 \mid 1;\ 0;\ -1;\ 0 \mid 1 \ldots$

$g_2 = \sin\pi = 0$

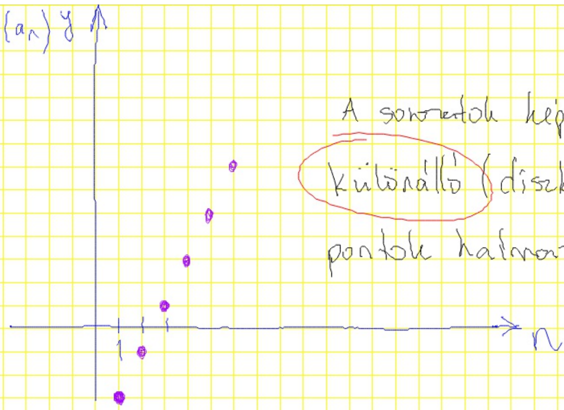
$g_3 = -1$

A sorozat korlátos $\quad \underset{k}{\underset{\shortparallel}{-1}} \le g_n \le \underset{K}{\underset{\shortparallel}{1}} \quad p = 4$

Sorozatok ábrázolása!

1. Koordináta-rendszerben

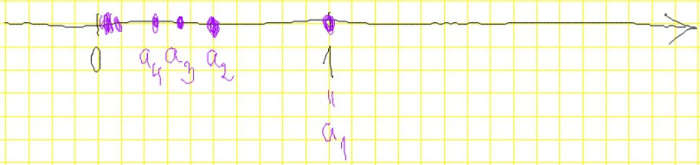
$$a_n = 2n - 5$$



A sorozatok képe:
különálló (diszkrét) pontok halmaza!

2. Számegyenesen

$$b_n = \frac{1}{n}$$



A számtani sorozat

Vizsgáljuk a következő sorozatokat!

$a_n = 4n$

$4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+4} 16 \xrightarrow{+4} 20$ $d=4$

$b_n = 5n - 3$

$2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12$ 17 22 $d=5$

$c_n = -6$

$-6 \xrightarrow{+0} -6 \xrightarrow{+0} -6$ -6 -6 $d=0$

$d_n =$ *Az* n. olyan természetes szám, amely 1-re végződik.

$1 \xrightarrow{+10} 11 \xrightarrow{+10} 21$ 31 41 $d=10$

$7 \xrightarrow{-3} 4 \xrightarrow{-3} 1$ -2 $d=-3$

TK.: 40.oldal

A **számtani sorozat** bármelyik elemét (a 2. elemtől kezdve) a megelőzőből úgy kapjuk, hogy a megelőző elemhez ugyanazt, a sorozatra jellemző számot hozzáadjuk.

Ha a sorozat bármely tagjából (kivéve az elsőt) kivonjuk az előző tagot, akkor mindig ugyanazt az állandó d számot kapjuk.

d: a számtani sorozat differenciája (különbsége)

A szomszédos elemek különbségét a számtani sorozat **különbségének** vagy **differenciájának** nevezzük, és d-vel jelöljük.

A számtani sorozat definíciója szerint:

$a_n = a_{n-1} + d,$

ahol a_n az n-edik, a_{n-1} az $(n-1)$-edik természetes számhoz rendelt elemet jelenti ($n = 2, 3, \ldots$).

A differencia és a monotonitás:

Ha $d > 0 \Rightarrow$ a sorozat szig. mon. nő

Ha $d = 0 \Rightarrow$ konstanssorozat

Ha $d < 0 \Rightarrow$ a sorozat szig. mon. csökken

Jellemezzük és ábrázoljuk a következő számtani sorozatot!

$e_1 = 5$

$d = 4$

A számtani sorozat számtani közép tulajdonsága:

5 9 13 17 21 25

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{a_1 + a_5}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (n > k)$$

$$\frac{a_{20} + a_{34}}{2} = a_{27}$$

A számtani sorozat számtani közép tulajdonsága:

Az első tag kivételével a számtani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepe. Képlettel:

$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, ha $n > k > 0$ egészek.

HF: 867. a, b, d, e

$$16 = 2n + 2$$
$$n = 7$$
$$a_7 = 16$$

$$16 = 2n^2 - 3n - 4$$
$$0 = 2n^2 - 3n - 20$$
$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4}$$
$$n_1 = 4$$
$$n_2 = -2,5 \notin Z^+$$
$$b_4 = 16$$

$$\log_2\left(\sqrt[4]{2}^n\right) = 16$$
$$\sqrt[4]{2}^n = 2^{16}$$
$$2^{\frac{n}{4}} = 2^{16}$$
$$n = 64$$
$$d_{64} = 16$$

$$2 \cdot 3^n - 2 = 16$$
$$2 \cdot 3^n = 18$$
$$3^n = 9$$
$$n = 2$$
$$e_2 = 16$$

TK.: 39/4.

$$a_1; a_2$$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2}}{2} = \frac{2a_2 + a_1 + a_2}{4} = \frac{a_1 + 3a_2}{4}$$

$$a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + 3a_2}{4}}{2} = \frac{2a_1 + 2a_2 + a_1 + 3a_2}{8} = \frac{3a_1 + 5a_2}{8}$$