ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2007. október 25.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben –feltehetőleg– megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$A \cap B = \{5; 7; 9\}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	*Az A és B halmaz felírása külön nem pontozható.*

2.		
$C = -2$	2 pont	*Az $\frac{1}{C}$ helyes meghatározásáért 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
$A = -1$, $B = -2$	1 pont	
$A > B$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A kék golyók száma: 9.	1 pont	
A piros golyók száma: 11.	1 pont	
$P = \frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{összes eset}} = \frac{11}{20} = 0,55$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*A jó végeredmény közlése 3 pontot ér.* *Ha a választ úgy adja meg, hogy a piros golyók aránya 55 %, tehát a keresett valószínűség 0,55, akkor is 3 pontot kap.*

5.		
a) hamis	1 pont	
b) igaz	1 pont	
c) hamis	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
A pozitív valós számok halmaza.	2 pont	*Az $x > 0$* válaszra is jár a 2 pont.
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$S_5 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	1 pont-*	**Ha a képlet nem szerepel, de jól használja az összefüggést, akkor is jár az 1 pont.*
$S_5 = \frac{60}{2} \cdot 5$	1 pont	
$S_5 = 150$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
5·4·3 = 60	2 pont	*Ha felsorolás után adja meg a helyes választ, akkor is jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	*Ha a keresett számokból legalább 30-at, de nem az összest felsorolja, 1 pontot kaphat.*

9.		
$x_1 = \frac{\pi}{6}$	1 pont	
$x_2 = \frac{5\pi}{6}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	*Ha periódust is használ, csak egy pontot kaphat. Ha a megoldást fokban adja meg, legfeljebb 1 pont adható.*

10.		
$\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$; $\mathbf{c} = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - (-\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$	1 pont	
$\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{i} - 5\mathbf{j}$	1 pont	
$\mathbf{c} = 7\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*A jó végeredmény közlése 3 pontot ér.*

11.		
Legyen az ötödik szám x, ekkor $\frac{1+8+9+12+x}{5}=7$.	1 pont	
$x=5$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A függvény legkisebb értéke az 1,	1 pont*	**Helyes értékkészlet meghatározása esetén jár az 1−1 pont.*
az adott intervallum végpontjaiban a függvény értéke 5, illetve 10,	1 pont*	
a függvény értékkészlete az $[1; 10]$ intervallum.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Bármilyen formában megadott helyes értékkészlet is 3 pontot ér.*

II./A

13. a)		
Az (5 alapú exponenciális) függvény szigorúan monoton növekedése miatt	1 pont	
$x - 2 < 13 - 2x$	1 pont	
$x < 5$	1 pont	
Az egyenlőtlenség megoldása: {1; 2; 3; 4}	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha felsorolja a megoldást adó 4 számot, 2 pontot kap, ha hivatkozik arra, hogy más megoldás nincs, további 2 pont jár.*

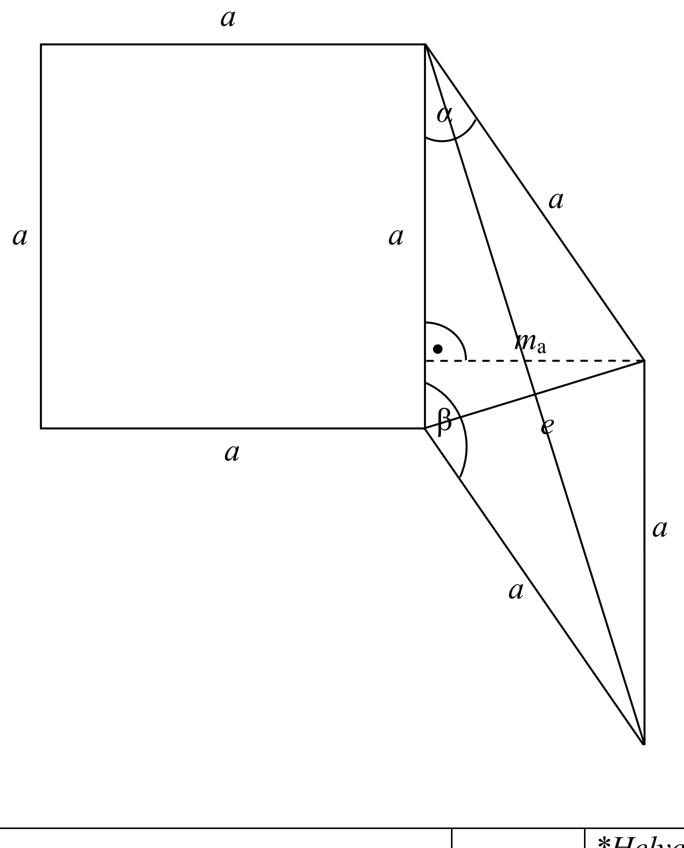
13. b)		
$x \geq 0$	1 pont*	
$3^{2\sqrt{x}} = 3^{x-3}$	1 pont	
A (3 alapú exponenciális) függvény szigorú monotonitása miatt $2\sqrt{x} = x - 3$.	1 pont	*A szigorú monotonitásra vonatkozó megjegyzés nélkül is jár az 1 pont.*
$4x = x^2 - 6x + 9$	1 pont	
$x^2 - 10x + 9 = 0$	1 pont	
$x_1 = 1 \qquad x_2 = 9$	1 pont	
Az $x = 1$ nem megoldása az egyenletnek. Az egyenlet megoldása a valós számok halmazán az $x = 9$.	2 pont*	
Összesen:	**8 pont**	**Ha behelyettesítéssel, vagy az értékkészlet vizsgálata alapján adja meg jól a megoldáshalmazt, teljes pontszámot kap.*

14. a)		
A teremben x rajzasztal van és az osztály létszáma y.	1 pont	*Ha az egyenlet vagy egyenletrendszer jó felírásából derül ki x és y jelentése, akkor is jár a pont.*
$2x + 8 = y$	1 pont	
$3x - 7 = y$	1 pont	
$x = 15$ és $y = 38$	1 pont	
Ellenőrzés	1 pont	
15 asztal van a teremben, és a kérdéses osztálylétszám 38 fő.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. b)		
A lehetséges „dátumok” száma: $12 \cdot 4 \cdot 10$,	2 pont	
tehát 480 „dátum” forgatható ki.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c)		
Valóságos dátumból nem szökőévben 365 van,	1 pont	
minden lehetséges „dátum” egyenlő valószínűséggel forgatható ki*, ezért valóságos dátumot $\frac{365}{480}$ (= 0,7604) valószínűséggel kapunk.	2 pont	**Jó válasz esetén akkor is jár a 2 pont, ha az indoklásban ez a gondolat nincs leírva.*
Összesen:	**3 pont**	

15. a)



Helyes ábra (amelyik kifejezi a négyzet és rombusz kapcsolatának megértését).	1 pont*	**Helyes megoldás esetén ábra hiányában is teljes pontszám jár.*
($T_{négyzet} = a^2$ és $T_{rombusz} = am_a$) $\frac{a^2}{am_a} = \frac{2}{1}$	3 pont	
A rombusz magassága: $m_a = 6{,}5$ (cm)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b)		
$\sin\alpha = \frac{m_a}{a}$ (ahol α hegyesszög)	1 pont	
$\alpha = 30°$	1 pont	
$\beta = 150°$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

15. c)		
Bármelyik lehetséges derékszögű háromszögből jó összefüggést felír a hosszabbik átló segítségével, például $\cos 15° = \frac{\frac{e}{2}}{13}$.	2 pont	
$e = 2\cdot 13\cdot\cos 15°$	1 pont	
$e = 25{,}11$ (cm)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Más helyes megoldás (pl. koszinusztétel alkalmazása) esetén is teljes pontszám jár.*

II./B

16. a)

Első forduló eredményei	1. kérdés	2. kérdés	3. kérdés	4. kérdés
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	***hibás***
Jó válaszok száma	7	10	***15***	8
Anikó elért pontszáma	***13***	***0***	5	0

Minden helyes beírt adat 1-1 pont.		
Összesen:	**4 pont**	

16. b)

A 2. kérdés oszlopa így módosul: helyes, 11, 9; Anikó tehát 9 pontot kapott.	1 pont	
Anikó elért pontszáma ezzel 27 lesz. Ez a régi pontszám 150 százaléka,	1 pont	
tehát a pontszám 50%-kal emelkedett volna.	1 pont	*A válasz úgy is kikövetkeztethető, hogy a 9 pontos növekedés a régi pontszám 50%-a.*
Összesen:	**3 pont**	

16. c)

<u>Első megoldás:</u> Anikó összesen $3^4 = 81$-féle módon válaszolhat a négy kérdésre.	2 pont	
Egyetlen esetben lesz minden válasza helyes, ezért a keresett valószínűség: $\frac{1}{81}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
<u>Második megoldás:</u> Minden kérdésnél a helyes válasz valószínűsége: $\frac{1}{3}$.	1 pont	
Az egyes válaszok egymástól függetlenek, ezért a keresett valószínűség: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

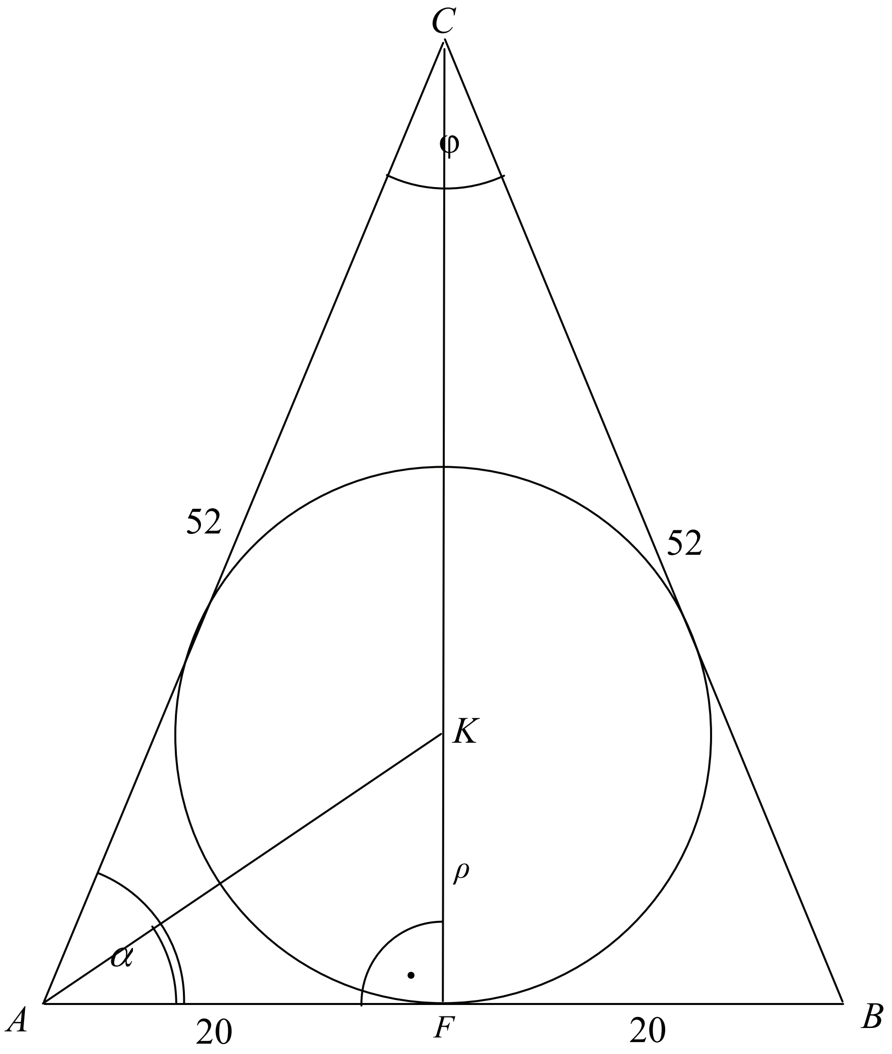
16. d)

Ha x jó válasz születik a vizsgált kérdésre, akkor a jól válaszolók $20 - x$ pontot kapnak személyenként.	1 pont	
Az elért összpontszám: $x(20 - x)$.	2 pont	

Az $x \mapsto 20x - x^2$ függvény maximumát keressük a 20-nál kisebb pozitív egészek körében. A maximum hely (akár grafikusan, akár teljes négyzetté való kiegészítéssel, akár a számtani-mértani közép összefüggésre való hivatkozással, akár az esetek végigszámolásával) $x = 10$.	3 pont	
Tíz játékos helyes válasza esetén lesz a játékosok összpontszáma a lehető legtöbb.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a)		
A lehetséges sorrendek száma: 5!	2 pont	
Az unokák 120-féle sorrendben kaphatják meg a levelet.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
17. b)		
Az utolsó hétre az 5 unoka bármelyike egyenlő valószínűséggel kerül.	2 pont	*Kedvező esetek száma 4!, az összes eset 5!, ezen modell választása esetén is jár a 2 pont.*
A keresett valószínűség tehát: $\frac{1}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
17. c)		
Az egyes napokon kötött darabok hosszúságai mértani sorozatot alkotnak.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldásból derül csak ki, akkor is jár az 1 pont.*
A mértani sorozatban $a_1 = 8$, $q = 1{,}2$	2 pont	
A sál teljes hossza a mértani sorozat első *n* elemének összegeként adódik.	1 pont	*Ha ez a megállapítás a használt képletek alapján derül csak ki, akkor is jár a 2 pont.*
$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	1 pont	
$200 = 8 \cdot \frac{1{,}2^n - 1}{0{,}2}$	1 pont	
$5 + 1 = 1{,}2^n$	1 pont	
$n = \frac{\lg 6}{\lg 1{,}2}$	2 pont	*Ha ismételt szorzással keresi meg az n-et, akkor is jár a 3 pont.*
$n \approx 9{,}83$	1 pont	
A sál a tizedik napon készül el.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

18. a)



Jó vázlatrajz az adatok feltüntetésével.	2 pont	
Ha a kúp nyílásszöge φ, akkor $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{20}{52}=0{,}3846$	1 pont	
Ebből $\varphi = 45{,}24°$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. b)

$m=\sqrt{2704-400}=48$	1 pont	
$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}=\frac{400\cdot\pi\cdot 48}{3}$	1 pont	
$V\approx 20106{,}19\ (\mathrm{cm}^3)$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)		
A kúpba írt gömb sugara megegyezik az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugarával.	2 pont	*Ha az ábrából vagy a számolásból derül ki ennek a felismerése, akkor is jár a 2 pont.*
A háromszög alapon fekvő szöge $\alpha = 67{,}38°$.	1 pont	
$\mathrm{tg}\ 33{,}69° = \frac{\rho}{20}$	1 pont	
$\rho = 13{,}33$ (cm)	1 pont	
A gömb felszíne : $A \approx 2234{,}01$ (cm^2)	1 pont	*ρ = 13,33-dal számolva $A \approx 2232{,}90$ (cm^2), ezért is jár az 1 pont.*
Összesen:	**6 pont**	
18. d)		
A körcikk ívének hossza: $i = 2r\pi$, $i = 2\cdot 20\ \pi \approx 125{,}66$ (cm)	2 pont	
$T_{\text{palást}} = \frac{i \cdot R}{2} = 2\cdot 20\cdot\pi\cdot 26$	1 pont	
$T_{\text{palást}} \approx 3267{,}26$ (cm^2)	1 pont	*i két tizedes jegyre való kerekített értékével számolva 3267,16 (cm^2), ezért is jár az 1 pont.*
Összesen:	**4 pont**	