ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2007. október 25.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

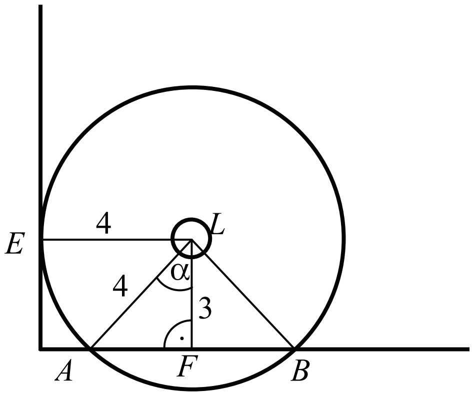
1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a) első megoldás		
Az $x \mapsto x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonjának megrajzolása.	1 pont	
Az $x \mapsto \lvert x-6 \rvert$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonjának megrajzolása.	2 pont	
A két grafikon közös pontjai első koordinátáinak leolvasása: –3 és 2.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. a) második megoldás		
1.eset: $x^2 + x - 6 = 0$ és $x < 6$,	1 pont	
ennek valós gyökei 2 és –3.	1 pont	
Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek.	1 pont	
2. eset: $x^2 - x + 6 = 0$ és $x \ge 6$,	1 pont	
ennek nincs valós megoldása.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b)		
$x > 0$ és $y > 1$ a logaritmus értelmezése miatt.	1 pont	*Ezt az 1 pontot akkor is megkapja a vizsgázó, ha nem állapítja meg az értelmezési tartományt, de ellenőrzéssel kizárja a hamis gyököt.*
A logaritmus azonosságait használva: $\left.\begin{array}{l}\lg(x+y) = \lg x^2 \\ \lg x = \lg 2(y-1)\end{array}\right\}$	2 pont	
A lg függvény kölcsönösen egyértelmű (vagy szigorúan monoton):	1 pont	
$\left.\begin{array}{l}x + y = x^2 \\ x = 2y - 2\end{array}\right\}$	1 pont	
A második egyenletből kifejezett x-et az elsőbe helyettesítve a $4y^2 - 11y + 6 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.	1 pont	
Ennek valós gyökei 2 és 0,75.	1 pont	
Az $1 < y$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak,	1 pont	
ezért csak $y = 2$ és így $x = 2$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása a feladatnak.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	
Az x-re egyváltozós egyenlet $2x^2 - 3x - 2 = 0$*, ennek megoldásai:* $-\frac{1}{2}$*, illetve* 2.		

2.		
 A telek öntözött területének nagyságát megkapjuk, ha az L középpontú körgyűrű területéből kivonjuk az AB húr által lemetszett körszelet területét.	1 pont	*Az 1 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csupán a megoldás menetéből derül ki.*
A körgyűrű területe: $\left(4^2 - 0{,}5^2\right)\pi \approx 49{,}5\ \left(m^2\right)$	1 pont	
Az AFL derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$, amiből $\alpha \approx 41{,}4°$.	2 pont	
A 2α középponti szögű ALB körcikk területe: $\frac{82{,}8 \cdot 4^2 \cdot \pi}{360} \approx 11{,}6\ (\mathrm{m}^2)$.	2 pont	
Az ALB egyenlő szárú háromszög területe: $\frac{4^2 \cdot \sin 82{,}8°}{2} \approx 7{,}9\ (\mathrm{m}^2)$.	2 pont	$3\sqrt{7}\ \left(\mathrm{m}^2\right)$
A körszelet területe tehát kb. 3,7 m^2, és így a telek öntözött területe kb. $49{,}5 - 3{,}7 = 45{,}8\ (\mathrm{m}^2)$.	1 pont	
Ez a telek területének kb. 2,2 %-a.	2 pont	
Összesen:	**11 pont**	

3. a)		
Kéthavonta 1,7%-kal lesz több pénze, ami három ciklusban $1{,}017^3\left(\approx 1{,}051872\right)$-es szorzót jelent.	2 pont	
Hat hónap után tehát a pénze $1\,000\,000 \cdot 1{,}051\,872 = 1\,051\,872$ Ft lenne.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. b)		
A megadott árfolyamon 1 000 000 Ft-ért $\frac{1\,000\,000}{252} = 3968{,}25$ eurót kap.	1 pont	
Ez az összeg hat hónap alatt, havi tőkésítés mellett hatszor kamatozik, tehát: $1{,}0025^6 \left(\approx 1{,}015\,094\right)$-szeresére növekszik.	2 pont	
Hat hónap múlva $3968{,}25 \cdot 1{,}015\,094 \approx 4028{,}15$ eurója lenne.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c)		
Legyen 1 euró a nyáron x Ft. Ha jobban jár, az azt jelenti, hogy $4028{,}15\,x > 1\,051\,872$,	2 pont	*Ha $\geq$ jelet ír, akkor is jár a 2 pont.*
amiből $x > 261{,}13$.	1 pont	
Ebből az árfolyamarány: 261,13/252=1,03623, tehát legalább kb. 3,63%-kal kellene nőnie a forint/euró árfolyamnak.	2 pont	*3,62 % esetén 1 pont. Ha x>261 Ft-tal számol, akkor is csak 1 pont.*
Összesen:	**5 pont**	

4. a)		
A kockák különbözők, tehát az összes lehetséges eset 6^6.	2 pont	
Ha mindegyikkel más számot dobunk, akkor a hat különböző szám 6! -féleképpen fordulhat elő.	2 pont	
Innen a klasszikus formula szerint a valószínűség $\frac{6!}{6^6} \left(= 0{,}0154\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. b)		
A hat szám összege legalább 34, az azt jelenti, hogy 34 vagy 35 vagy 36.	1 pont	
Tehát a következő esetek lehetnek: 1) 36=6+6+6+6+6+6; 2) 35=6+6+6+6+6+5; 3) 34=6+6+6+6+6+4; 4) 34=6+6+6+6+5+5.	2 pont	*Három jó eset megtalálása 1 pont. Ha kevesebb esetet talál meg, akkor 0 pontot kap.*
Összeszámoljuk, hogy az egyes esetek hányféleképpen fordulhatnak elő: 1) 1-féleképpen,	1 pont	
2) 6-féleképpen (bármelyiken lehet az 5), 3) 6-féleképpen (bármelyiken lehet a 4),	1 pont	*Ez az 1 pont akkor is jár, ha a 2) és a 3) eset közül az egyiket korábban kifelejtette a vizsgázó, és ezért pontot vesztett, de az általa itt megadott egyetlen esetben jól állapítja meg, hogy az 6 különböző módon következhet be.*
4) $\binom{6}{2}(=15)$-féleképpen.	2 pont	
A kedvező esetek száma összesen: 1+6+6+15=28.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{28}{6^6}(\approx 0{,}0006)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

II.

5. a) első megoldás		
$BC = 2 \cdot 26 \cdot \sin 60°$	3 pont	
$BC \approx 45{,}0$ (cm)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. a) második megoldás		
Legyen a BC oldal felezőpontja F, a körülírt kör középpontja K. Ekkor $BKC\angle = 120°$, és	2 pont	
$FB = (FC =) 26 \cdot \sin 60° (\approx 22{,}5)$ (cm)	1 pont	
$BC = 2 \cdot FB = 2 \cdot 26 \cdot \sin 60° \approx 45{,}0$ (cm)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
A szabályos háromszög tulajdonságai alapján Pitagórász tételével számolva is jár a 4 pont.		

5. b) első megoldás		
Koszinusztételt felírva a BC oldalra: $(52 \sin 60°)^2 = b^2 + 9b^2 - 6b^2 \cos 60°$	2 pont	
Ebből $b^2 \approx 289{,}7$.	2 pont	
$b > 0$, ezért $b \approx 17{,}0$ (és így $3b \approx 51{,}0$) (cm).	1 pont	
Erre felírva a szinusztételt: $\dfrac{\sin \beta}{\sin 60°} = \dfrac{AC}{BC} \approx \dfrac{17{,}0}{45{,}0}$, amiből	2 pont	
$\sin \beta \approx 0{,}3273$, így $\beta \approx 19{,}1°$,	2 pont	
mert az AC oldallal szemköztes β csak hegyesszög lehet.	2 pont	*Ha ezt nem vizsgálja, akkor a* $\beta \approx 180° - 19{,}1° = 160{,}9°$ *eset lehetetlenségéért kaphatja meg ezt a 2 pontot.*
A háromszög harmadik szöge kb. 100,9°.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés: Ha az a)-ban hibás eredményre jut, de b)-ben a hibás értékkel mindvégig jól számol, akkor a b) rész megoldása teljes értékű.

5. b) **második megoldás**		
A szokásos jelöléseket használva $\gamma = 120° - \beta$.	1 pont	
Szinusztételt felírva: $\frac{\sin(120° - \beta)}{\sin\beta} = 3$.	2 pont	
Ebből: $\sin 120° \cos\beta - \cos 120° \sin\beta = 3 \sin\beta$.	2 pont	
$\beta = 90°$ nem megoldás, tehát $\cos\beta \neq 0$.	2 pont	
$\cos\beta$ -val osztva, majd 2-vel szorozva: $\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\beta = 6\,\mathrm{tg}\,\beta$.	2 pont	
$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}3464$, amiből $\beta \approx 19{,}1°$.	2 pont	
A háromszög harmadik szöge kb. 100,9°.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

6. a)		
A $-4x(x^2 - 48) = 0$ egyenlet $]-1;6[$ intervallumba eső egyetlen megoldása a 0;	2 pont	
f deriváltfüggvényének hozzárendelési szabálya: $f'(x) = -12x^2 + 192$.	1 pont	
A deriváltfüggvény $]-1;6[$ intervallumba eső egyetlen zérushelye a 4;	1 pont	
itt a derivált előjelet vált, mégpedig pozitívból negatívba megy át.	1 pont	
Az *f* függvény tehát monoton növekedő a $]-1;4]$ intervallumon, és monoton csökkenő a $[4;6[$ intervallumon.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	
Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe f értelmezési tartományát, és ezért más számhalmazon (pl. **R***-en) végez vizsgálatot, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.*		

6. b)		
A $[\,0\,;c\,]$ intervallumon $f(x)\geq 0$,	1 pont	*Ezt a gondolatot ábra is helyettesítheti.*
ezért a $\int\limits_0^c \left(-4x^3+192x\right)dx=704$ egyenletet kell megoldani a $[\,0\,;6\,[$ intervallumon.	2 pont	
$\int\limits_0^c \left(-4x^3+192x\right)dx=\left[-x^4+96x^2\right]_0^c$	1 pont	*Bármelyik primitív függvény megadásáért jár a pont.*
$\left[-x^4+96x^2\right]_0^c=-c^4+96c^2$	1 pont	
$-c^4+96c^2=704$ $c^4-96c^2+704=0$	1 pont	
Megoldóképlettel: $c^2=8$ vagy $c^2=88$.	2 pont	
Az értelmezési tartományban az egyetlen pozitív megoldás: $c=\sqrt{8}$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. a)		
A közelítő henger alapkörének sugara: $\frac{1}{2}\cdot\frac{12+8}{2}=5$ (cm), térfogata $25\cdot\pi\cdot 200=5000\pi$ (cm^3) (ami kb. 15 708 cm^3).	1 pont	
A csonkakúp elméletileg pontos térfogata: $\frac{200\pi}{3}\left(6^2+6\cdot 4+4^2\right)=\frac{15200\pi}{3}$ (cm^3) ($\approx$15 917 cm^3).	1 pont	
A közelítő érték $\frac{200\pi}{3}\approx 209$ cm^3-rel kisebb, tehát a pontos értéktől $\frac{200}{152}\approx 1{,}3$ %-kal tér el.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b)		
Legyen a csonkakúp alapköreinek sugara R és r, magassága m (mindegyik pozitív).		
A csonkakúp „elméleti” térfogata: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$.	1 pont	
A csonkakúp gyakorlati térfogata: $\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi$.	1 pont	
A két térfogat különbségéről állítjuk: $\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)-\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 m\pi \geq 0$.	1 pont	
Szorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\frac{12}{m\pi}$-vel: $4\left(R^2+Rr+r^2\right)-3(R+r)^2 \geq 0$ A zárójeleket felbontva és az összevonásokat elvégezve: $R^2-2Rr+r^2 \geq 0$,	2 pont	
vagyis $(R-r)^2 \geq 0$ adódik, ami minden R és r esetén igaz (egyenlőség esetén már nem csonkakúpról, hanem hengerről lenne szó).	1 pont	
A következtetés minden lépése megfordítható, ezért az eredeti állítás is igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. c)		
Az f deriválható függvény, a deriváltfüggvényének hozzárendelési szabálya: $f'(x)=25\cdot\frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)-(x-1)^2(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.	2 pont	
$f'(x)=75\cdot\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.	2 pont	
Az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs megoldása az $]1\,;+\infty[$ halmazon, tehát f-nek nincs szélsőértéke.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a)		
(Mivel bárki végezhet bármelyik dobogós helyen, ezért az első 6, a második 5, a harmadik helyezett 4-féle lehet,) azaz $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ -féle dobogós sorrend lehetséges, tehát ennyi szelvényt kell kitölteni.	3 pont	*A zárójelben levő szöveg nélkül is 3 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

8. b) első megoldás		
A telitalálatos szelvény tippje: *ABC*. Egyetlen szelvényen lett három találat.	1 pont	
A pontosan 2 találatot elérő szelvények tippje *ABX*, *AXC* vagy *XBC* alakú, ahol $X \in \{D; E; F\}$. Tehát 9 szelvényen lett pontosan két találat.	3 pont	
Az egytalálatos szelvények számát keressük. Az első három helyezett bármelyikét eltalálhatta a fogadó, így először tegyük fel, hogy éppen az 1. helyezettet (A) találta el, de nem találta el sem a 2. helyezettet, sem a 3. helyezettet. Ez két lényegesen különböző módon valósulhatott meg. 1. eset: A második helyezettre adott tipp a C versenyző. A szelvényen szereplő tipp ACX alakú, ahol $X \in \{ B ; D ; E ; F \}$. Ez négy lehetőség, azaz 4 ilyen egytalálatos szelvény lett.	3 pont	*Ha a két esetet nem választja szét, és így 12 esettel számol, összesen 3 pontot kap.*
2. eset: A második helyezettre adott tipp nem a *C* versenyző (de nem is a *B* versenyző). A szelvényen szereplő tipp *AXY* alakú, ahol $X \in \{ D ; E ; F \}$. Az *X* helyére beírandó név megválasztása után az *Y* helyére három név bármelyike választható, mert csak három név nem írható oda: az *A*, a *C*, továbbá az *X* helyére választott név. Ezért $3 \cdot 3 = 9$ ilyen egytalálatos szelvény lett.	2 pont	
Tehát összesen $4 + 9 = 13$ darab olyan egytalálatos szelvény lett, ahol csak az első helyezettet (*A*) találta el a fogadó.	1 pont	
Hasonlóan okoskodva: 13 olyan szelvény lett, amelyen csak a második helyezettet (*B*) találta el és 13 olyan szelvény, amelyen csak a harmadik helyezettet (*C*). Tehát összesen $3 \cdot 13 = 39$ egytalálatos szelvénye lett a fogadónak.	2 pont	
A legalább egytalálatos szelvények száma tehát: $1 + 9 + 39 = 49$.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

Az alábbi táblázat áttekintést ad a kéttalálatos szelvényekről.

I. (A)	II.(B)	III.(C)		szelvények száma (db)
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	X	$X \in \{D; E; F\}$	3
$\boldsymbol{A}$	X	$\boldsymbol{C}$	$X \in \{D; E; F\}$	3
X	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$X \in \{D; E; F\}$	3

Az alábbi táblázat áttekintést ad az egytalálatos szelvényekről.

I. (A)	II.(B)	III.(C)		szelvények száma (db)
$\boldsymbol{A}$	C	X	$X \in \{B; D; E; F\}$	4
$\boldsymbol{A}$	X	Y	$X \in \{D; E; F\}$, majd $Y \notin \{A; C; X\}$	$3 \cdot 3 = 9$
C	$\boldsymbol{B}$	X	$X \in \{A; D; E; F\}$	4
X	$\boldsymbol{B}$	Y	$X \in \{D; E; F\}$, majd $Y \notin \{B; C; X\}$	$3 \cdot 3 = 9$
B	X	$\boldsymbol{C}$	$X \in \{A; D; E; F\}$	4
X	Y	$\boldsymbol{C}$	$X \in \{D; E; F\}$, majd $Y \notin \{B; C; X\}$	$3 \cdot 3 = 9$

8. b) második megoldás		
A telitalálatos szelvény tippje: ABC. Megszámoljuk, hány olyan szelvény van az összes között, amelyen egyetlen találat sincs, majd ezek számát levonjuk az összes szelvény számából.	1 pont	*Az „összes – kedvezőtlen = kedvező” ötletért jár a pont. Ha a gondolat csak a számításban jelenik meg, akkor is jár a pont.*
1. eset: Az első három helyezett neve szerepel a fogadószelvényen, de egyik sem a megfelelő helyen. Két ilyen eset van: CAB vagy BCA tipp van a szelvényen.	2 pont	
2. eset: Az első három helyezett neve közül pontosan kettő van a fogadószelvényen, de ezek rossz helyen.	1 pont	
Ha pl. A és B neve szerepel, akkor az összes nulla találatos tipp XAB vagy BAX vagy BXA típusú, ahol X helyére a D, E, F közül bármelyik név kerülhet. Ilyen szelvényből 9 darab van. Ugyancsak 9 szelvényen az A és C, és másik 9 szelvényen a B és C neve szerepel, de rossz helyen. Összesen tehát $3 \cdot 9 = 27$ olyan szelvény van, amelyen az első három helyezett neve közül pontosan kettő szerepel a fogadószelvényen, de ezek rossz helyen.	2 pont	
3. eset: Az első három helyezett neve közül pontosan egy szerepel a fogadószelvényen, de ez rossz helyen.	1 pont	
Ha ez az egy név pl. az A, akkor az XAY és az XYA tippeket tartalmazó szelvényeken nincs egyetlen találat sem. Mivel $X \in \{D; E; F\}$ és $Y \in \{D; E; F\}$, így mindkét fajtából $3 \cdot 2 = 6$ darab, a két fajtából összesen tehát 12 darab, találat nélküli szelvény van. Az előbbi okoskodást B-re és C-re megismételve kapjuk, hogy összesen $3 \cdot 12 = 36$ olyan szelvény van, amelyen az első három helyezett neve közül pontosan egy szerepel a fogadószelvényen, de ez rossz helyen.	2 pont	
4. eset: Az A, B, C nevek egyike sem szerepel a szelvényen. Ekkor a D, E, F nevek találhatók rajta valamilyen sorrendben. Ilyen szelvény összesen 6 darab van.	2 pont	
A találat nélküli szelvények száma: $2 + 27 + 36 + 6 = 71$,	1 pont	
tehát a legalább egytalálatos szelvényből $120 - 71 = 49$ darab lett.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

9. a)		
A gyakorisági diagram szerint a következő távolságok fordulnak elő (mm-ben mérve): 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 44.	2 pont	
Ebből az átlag: $\frac{3\cdot 41+4\cdot 42+43+44}{3+4+1+1}=\frac{378}{9}=42$ tehát 42 mm.	1 pont	*Ez a 3 pont akkor is jár, ha az adatokat helyesen olvassa le a diagramról, és ezeket a számológépbe táplálva csupán közli az átlag és a szórás értékét, de nem hivatkozik ezek kiszámítási módjára.*
A szórásnégyzet: $\frac{3\cdot 1^2+4\cdot 0^2+1^2+2^2}{9}=\frac{8}{9}(\text{mm}^2)$,	1 pont	
tehát a szórás: $\sqrt{\frac{8}{9}}\approx 0{,}94$ (mm).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) **első megoldás**		
Legyen a tizedik mért távolság x (mm). Az átlag ennek hozzávételével a következőképpen alakul: $\frac{42\cdot 9+x}{10}=\frac{378+x}{10}=37{,}8+0{,}1x$	2 pont	
A szórásnégyzet a definíció szerint: $\frac{3\cdot(3{,}2-0{,}1x)^2+4\cdot(4{,}2-0{,}1x)^2+(5{,}2-0{,}1x)^2}{10}+$ $+\frac{(6{,}2-0{,}1x)^2+(0{,}9x-37{,}8)^2}{10}$.	2 pont	
Átalakítva: $\frac{0{,}9x^2-0{,}1x\cdot(19{,}2+33{,}6+10{,}4+12{,}4+18\cdot 37{,}8)^2}{10}+$ $+\frac{3\cdot 3{,}2^2+4\cdot 4{,}2^2+5{,}2^2+6{,}2^2+37{,}8^2}{10}=$ $=0{,}09x^2-7{,}56x-159{,}56$.	2 pont	
A feltétel szerint a tíz távolság szórása nem nagyobb 1 mm-nél, azaz a szórásnégyzet sem nagyobb 1 mm^2-nél. Így $0{,}09x^2-7{,}56x+159{,}56\le 1$, tehát megoldandó a $0{,}09x^2-7{,}56x+158{,}56\le 0$ egyenlőtlenség.	1 pont	
A pozitív főegyüttható miatt a megoldás: $\frac{126-2\sqrt{5}}{3}\le x\le\frac{126+2\sqrt{5}}{3}$, kerekítve kb. $40{,}5\le x\le 43{,}5$.	2 pont	
Egész milliméterben megadva csak a 41, a 42 és a 43 mm felel meg. Tehát a minőségellenőr a tizedik lemezen vagy 41, vagy 42, vagy 43 mm távolságot mért.	2 pont	*A szöveges válaszért 2 pont jár.*
Összesen:	**11 pont**	
1) Ha a vizsgázó számítással (számológép segítségével) igazolja, hogy a 41, a 42 és a 43 mm is megoldása a feladatnak (ezek az értékek megfelelnek tizedik méretnek), akkor 3 pontot kaphat. *2) Ha megmutatja, hogy a 40 mm és a 44 mm nem megoldás, akkor további 2 pontot kap. Ha indokolja is, hogy miért ezt az öt adatot helyettesítette be, akkor további 1 pontot kap.* *3) További pontokat azonban már nem kaphat újabb konkrét adatok behelyettesítéséért, de, ha hivatkozik rá, hogy a többi adat változatlanul hagyása mellett, egy adatnak, az átlagtól való eltérését növelve a szórás nő, akkor teljes pontszámot kap.*		

9. b) második megoldás		
Ha a vizsgázó a függvénytáblázatban is megtalálható összefüggést használja – mely formula ismerete nem érettségi követelmény –, akkor a pontozás az alábbi:		
A szórásnégyzet egyenlő az adatok négyzetösszegének átlaga mínusz az átlaguk négyzete.	2 pont	
Ezzel $\frac{x^2+3\cdot 41^2+4\cdot 42^2+43^2+44^2}{10}-\left(\frac{378+x}{10}\right)^2\le 1$ adódik.	3 pont	
Rendezve (100-zal szorzás után): $9x^2-756x+15856\le 0$.	2 pont	
Ebből a két gyök közötti tartomány a megoldás (kb.): $40{,}5\le x\le 43{,}5$.	2 pont	
Egész mm-ben megadva csak a 41, 42 és 43 lehetséges. Tehát a minőségellenőr a tizedik lemezen vagy 41, vagy 42, vagy 43 mm távolságot mért.	2 pont	
Összesen:	**11 pont**	