# Matematika

## Emelt szintű feladatsor pontozási útmutatója

Kérjük, hogy a dolgozatok javítását a javítási útmutató alapján végezze, a következők figyelembevételével.

**Formai kérések:**

- Kérjük, hogy *piros tollal* javítson, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölje a hibákat, hiányokat stb.
- Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám feltüntetése.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes *részpontszámokat* is írja rá a dolgozatra.

**Tartalmi kérések:**

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, kérjük, hogy keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai további részpontokra *bonthatók*.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett.*
- Ha a megoldásban *számolási hiba*, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- A második részben öt feladat közül négyet kell a tanulónak *kiválasztani* és megoldani. Értékeléskor csak ezt a négyet lehet figyelembe venni.

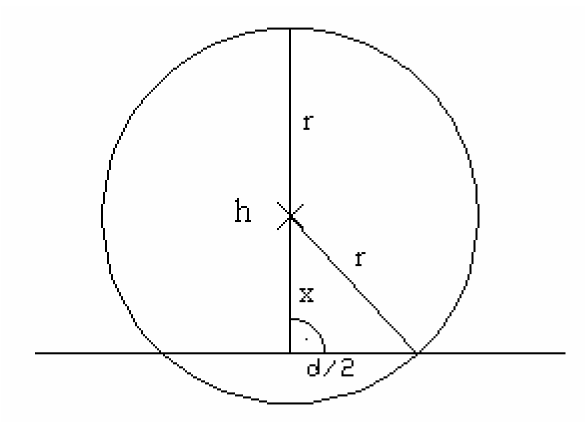
## I. rész

### 1. feladat

| | | |
|---|---|---|
| $4^{3/2}\cdot 4^x - 14\cdot 2^2\cdot 2^x + 96 = 0$ | 2 pont | |
| $8\cdot 4^x - 56\cdot 2^x + 96 = 0$ | 2 pont | *A hatványozás azonosságainak alkalmazásáért.* |
| $2^{2x} - 7\cdot 2^x + 12 = 0$ | 1 pont | *Másodfokú egyenlet rendezett alakjához való eljutásért.* |

| | | |
|---|---|---|
| $2^x = 4$ vagy $2^x = 3$ | 2 pont | *A másodfokú egyenlet megoldásáért.* |
| $x_1 = 2$ | 1 pont | *Az egyik gyökért.* |
| $x_2 = \log_2 3 \approx 1{,}585$ | 1 pont | *A másik gyökért (közelítő érték nélkül is).* |
| A kapott gyökök kielégítik az egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre. | 1 pont | *Az ellenőrzésért, ill. annak megállapításáért, hogy a kapott gyökök valóban megoldások. Ha csak egy gyököt talált meg, de azt ellenőrzi, akkor is jár a pont.* |
| Az $x_1$ eleme az adott intervallumnak, ez tehát megoldás. | 1 pont | |
| Az $x_2$ nem eleme az intervallumnak. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

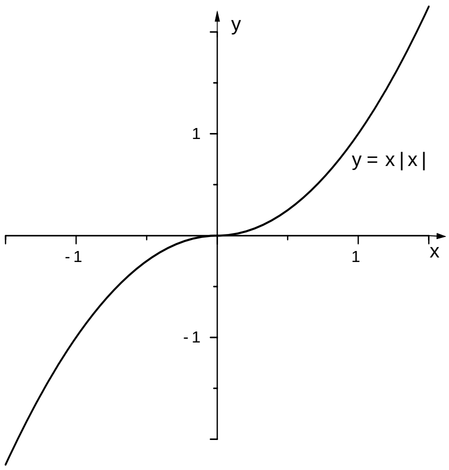
## 2. feladat




| | | |
|---|---|---|
| Rajz | 3 pont | *A síkmetszet ábráján szerepelnie kell az ismert (r;h) és ismeretlen (d;x) szakaszoknak, a derékszögű háromszögnek.* |
| $h = 4{,}8$ cm $= 48$ mm<br>$D = 2r = 56$ mm<br>$d = ?$ | 1 pont | *Átváltásért.* |
| $r = D/2 = 28$ mm | 1 pont | *A sugár kiszámításáért.* |
| $x = h - r = 20$ mm | 2 pont | *A befogó kiszámításáért.* |
| $(d/2)^2 = r^2 - x^2$ | 2 pont | *Pitagorasz-tétel felírásáért.* |
| $(d/2)^2 = 28^2 - 20^2$ | 1 pont | *Behelyettesítésért.* |
| $d/2 = 19{,}596$ mm | 1 pont | |
| $d = 39{,}19$ mm $\approx 39$ mm | | |
| A lyuk átmérője 39 mm. | 1 pont | *Mértékegységgel ellátott eredményért.* |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

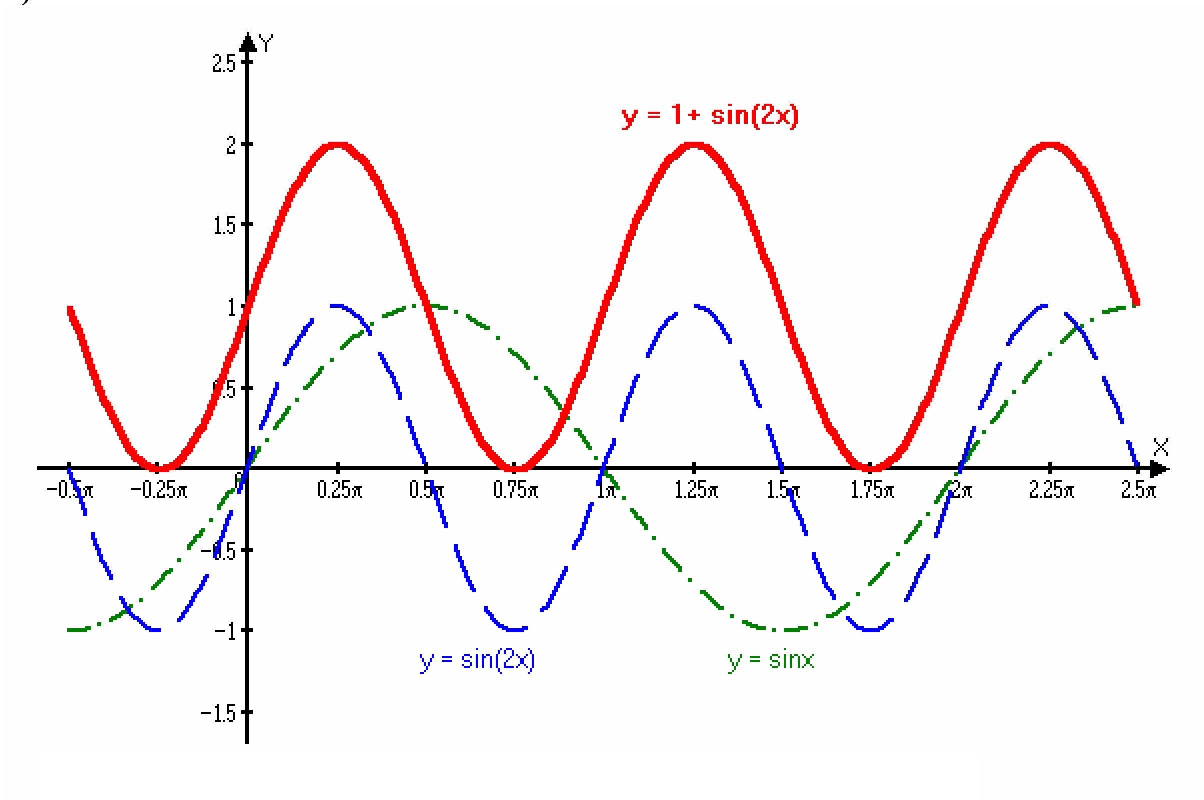
**3. feladat**

**a)**



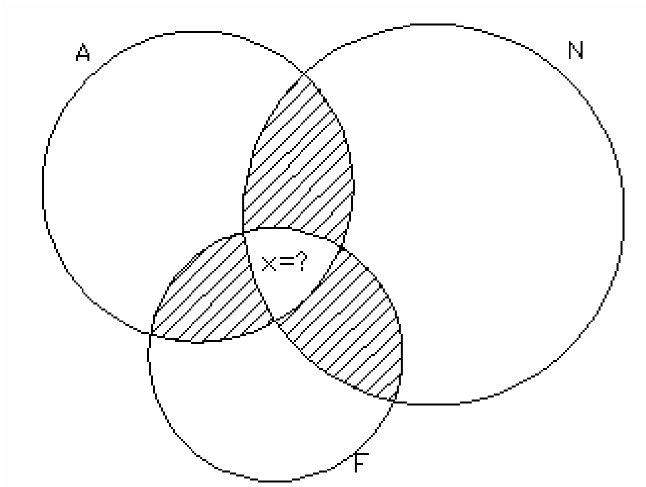

| | | |
|---|---|---|
| $y = x \cdot \lvert x \rvert = x^2$, ha $x \geq 0$ | 1 pont | |
| $-x^2$, ha $x < 0$ | 1 pont | |
| A grafikon | 1 pont | *A grafikon megrajzolásáért összesen 3 pont jár, az átalakítás leírása nélkül is.* |
| Az értékkészlet: R | 1 pont | *Az értékkészlet helyes megállapításáért.* |
| A függvény az értelmezési tartományon szigorúan monoton nő. | 1 pont | *A monotonitás helyes leírásáért.* |
| Szélsőértéke nincs. | 1 pont | *A szélsőérték vizsgálatáért.* |
| *Az a) részért összesen:* | *6 pont* | |

**b)**



| | | |
|---|---|---|
| $y = \sin^2x + \cos^2x + 2\sin x\cos x$ | | |
| $y = \sin 2x + 1$ | 2 pont | *A trigonometrikus átalakításért.* |
| Grafikon: | 2 pont | *A grafikon helyes felrajzolásáért. Akármilyen módon jut a helyes grafikonhoz, összesen 4 pont.* |
| Az értékkészlet: [0;2] | 1 pont | *Az értékkészlet helyes megállapításáért.* |
| A függvény szigorúan monoton nő: $[-\pi/4 + k\pi\ ;\ \pi/4 + k\pi]$, $k\in Z$ szigorúan monoton csökken: $[\pi/4 + k\pi\ ;\ 3/4\pi + k\pi]$ | 1 pont | *A monotonitás helyes leírásáért.* |
| A fv. max. helyei: $x = \pi/4 + k\pi$, minimumhelyei: $x = 3/4\pi + k\pi$ | 1 pont | *A szélsőértékek helyéért.* |
| A minimum értéke 0, a maximumé 2. | 1 pont | *A szélsőértékek értékéért.* |
| *A b) részért összesen:* | *8 pont* | |
| **Összesen:** | **14 pont** | |

## 4. feladat




1. megoldás:

$|A| = 14$; $|N| = 15$; $|F| = 11$

| | | |
|---|---|---|
| \|pontosan két nyelvet tanulók\| = 6 | 5 pont | *A feladat adatainak helyes elképzeléséért (pl. Venn-diagramon feltüntetett számok).* |
| Ha a mindhárom nyelvet tanuló diákok száma x, akkor: | | |
| \|A\| + \|N\| + \|F\| – \|pontosan két nyelvet tanulók\| – 2x = 30 | 5 pont | *A kérdezett számosság meghatározásához alkalmas összefüggés felírásáért (nem feltétlenül egyenlettel).* |
| $14 + 15 + 11 - 6 - 2x = 30$ | 1 pont | *Helyes numerikus egyenlet.* |
| $x = 2$ | 1 pont | *Helyes numerikus eredményért.* |
| tehát 2 diák tanulja mindhárom nyelvet. | 1 pont | *Helyes szöveges válaszért.* |
| **Összesen:** | **13 pont** | |

2. megoldás:

30 diák mindegyike részt vesz egy nyelvórán, ez 30 óra. 6-an két nyelvet is tanulnak, ez +6 óra, azaz eddig 36 nyelvóra (a diákok óráit számolva). 5 pont

Összesen 40 nyelvóra van, hiányzik tehát még 4 óra, ami abból adódik, hogy vannak, akik 3 órán is részt vesznek. 2 pont

Nyilván 2 ember esetén adódik +4 óra, ha a mindegyikük még 2-2 órán jelen van. 5 pont

Tehát 2 tanuló tanul 3 nyelvet. 1 pont

**Összesen: 13 pont**

***Megjegyzés:*** *Szisztematikus próbálgatással, kísérletezéssel nyert helyes eredményért, ha azt ellenőrzi is, de nem bizonyítja, hogy más megoldás nem lehetséges, 8 pont adható.*

## II. rész

**A következő öt feladat (5.- 9.) közül tetszés szerint választott *négyet* kell megoldania!**

### 5. feladat

**a)**

| | | |
|---|---|---|
| A futónövény havi növekedésének hosszúságai mértani sorozatot alkotnak, | 1 pont | |
| amelynek első tagja $a_1 = 100$ cm, | 1 pont | |
| a hányadosa $q = 4/5 = 0{,}8$. | 1 pont | *A mértani sorozat felismeréséért, az $a_1$ és a q meghatározásáért 3 pont jár* |
| A 21. havi növekedés a mértani sorozat 21. tagja: | | |
| $a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 100 \cdot 0{,}8^{20}$ | 1 pont | |
| $a_{21} \approx \underline{1{,}15 \text{ cm}}$ | 1 pont | *A 21. tag meghatározásáért 2 pont jár.* |
| *Az a) rész összesen*: | *5 pont* | |

**b)**

| | | |
|---|---|---|
| A mértani sorozat összegének kell 400 cm-rel egyenlőnek lennie, tehát: | | |
| $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ | | |
| $S_{21} = 100 \cdot \dfrac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} = 400$ | 2 pont | *Az egyenlet felírásáért 2 pont jár.* |
| $100 \cdot (0{,}8^n - 1) = 400 \cdot (0{,}8 - 1)$ | | |
| $0{,}8^n = 0{,}2$ | 1 pont | |
| $n = \log_{0,8} 0{,}2$ | 1 pont | |
| $n = \dfrac{\lg 0{,}2}{\lg 0{,}8} \approx 7{,}21$ | 1 pont | |
| Tehát a <u>8. hónapban</u> éri el a 400 cm-es hosszt. | 1 pont | *Az n kiszámításáért 4 pont jár.* |
| *A b) rész összesen:* | *6 pont* | |

**c)**

Az előző ponthoz hasonlóan:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \cdot \frac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} = 600$$ 2 pont

$$100 \cdot (0{,}8^n - 1) = 600 \cdot (0{,}8 - 1)$$
$$0{,}8^n = -0{,}2$$ 1 pont

Ez viszont nem lehetséges, azaz a <u>600 cm-es hosszúságot már nem éri el</u> a növény. 2 pont *Az ellentmondás felismeréséért 2 pont jár.*

*A c) rész összesen: 5 pont*

**Összesen: 16 pont**

**<u>6. feladat</u>**

**a)**

| Gy | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cs | 21 | 26 | 28 | 17 | 7 | 1 | 0 |

3 pont *Ezt a 3 pontot bontani kell, ha van hibás válasz is. Az adható pontszám: a jó válaszok darabszáma felének egészrésze.*

*Az a) rész összesen: 3 pont*

**b)**

Számtani közép:

$$\frac{1 \cdot 21 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0}{100}$$ 1 pont

Értéke: 2,66 1 pont

Medián: 3,
hiszen az 50. és az 51. család is 3 gyermekes a gyermekszám szerinti sorba rendezéskor. 2 pont *Indoklás nélkül is elfogadható.*

Módusz: 3,
mert ez a leggyakoribb érték. 2 pont *Indoklás nélkül is elfogadható.*

*A b) rész összesen: 6 pont*

**c)**

92 családban van legfeljebb 4 gyermek. 2 pont

A jó esetben közülük kell kiválasztani kettőt:

$$\binom{92}{2}$$ 1 pont

Az összes esetben 100 családból kell kiválasztani kettőt: $\binom{100}{2}$. 1 pont

A keresett esély e kettő hányadosa:

$$\frac{\binom{92}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{92 \cdot 91}{100 \cdot 99} = 0{,}8457$$ 2 pont

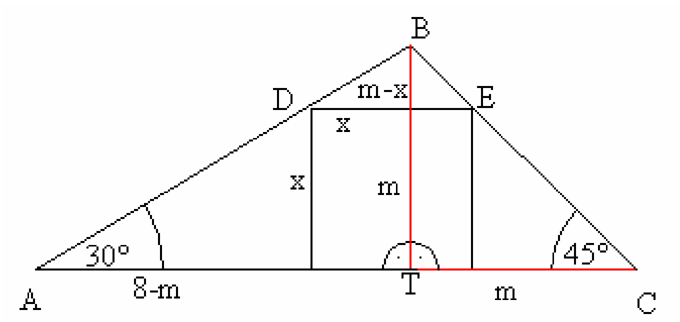
Tehát erre az esély kb. 84,6%. 1 pont

*A c) rész összesen: 7 pont*

**Összesen: 16 pont**

## 7. feladat

**a)**




| | | |
|---|---|---|
| Rajz | 3 pont | *A geometriai modell helyes elképzeléséért.* |

ABT derékszögű háromszögben

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{m}{8-m}$ | 1 pont | |
| $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{m}{8-m}$ | 1 pont | |
| m = 2,92 méter | 1 pont | *A magasság meghatározásáért 3 pont adható.* |

Két hasonló háromszögből (ABC és DBE):

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{m-x}{x} = \dfrac{m}{AC}$ | 2 pont | |
| $\dfrac{2{,}92-x}{x} = \dfrac{2{,}92}{8}$ | 1 pont | |
| x = 2,14 méter | 1 pont | *Az ablak méretének meghatározásáért* |
| *Az a) rész összesen:* | *10 pont* | |

**b)**

Ha összesen x db ablakot gyártanak, akkor:

| | gyárt | ebből selejtes | |
|---|---|---|---|
| 1. cég | 0,15x | $0{,}03 \cdot 0{,}15x = 0{,}0045x$ | 1 pont |
| 2. cég | 0,35x | $0{,}05 \cdot 0{,}35x = 0{,}0175x$ | 1 pont |
| 3. cég | 0,4x | $0{,}01 \cdot 0{,}4x = 0{,}004x$ | 1 pont |
| 4. cég | 0,1x | $0{,}1 \cdot 0{,}1x = 0{,}01x$ | 1 pont |

Az összes selejtes ablak:

$0{,}0045x + 0{,}0175x + 0{,}004x + 0{,}01x = 0{,}036x$ 1 pont

| | | |
|---|---|---|
| Tehát 3,6% az esélye, hogy a választott ablak selejtes lesz. | 1 pont | *Ha konkrét darabszámra számolja ki az arányt, akkor is jár a 4 pont.* |
| *A b) rész összesen:* | *6 pont* | |
| **Összesen:** | **16 pont** | |

## 8. feladat

1. megoldás

Az (1) egyenletből:

$$x(y-30)=24y$$

$$x=\frac{24y}{y-30}$$ 3 pont *Az x kifejezése y-nal.*

A (3) egyenletből:

$$z(y-30)=18y$$

$$z=\frac{18y}{y-30}$$ 3 pont *A z kifejezése ugyancsak y-nal, tehát ha valamennyi változó egy ismeretlennel van már kifejezve.*

A kapott kifejezéseket a (2) egyenletbe helyettesítve

$$\frac{y\cdot\frac{24y}{y-30}}{3\cdot\frac{24y}{y-30}+2\cdot\frac{18y}{y-30}}=8$$

$$\frac{24y^2}{72y+36y}=8$$ 4 pont *Az egyismeretlenes egyenlet felírásáért.*

Innen $y=36 \quad (y\neq 0)$ 2 pont *Az egyik ismeretlen numerikus értékéért, y = 0 gyök kizárásáért.*

Ezt behelyettesítve $x=144$ 1 pont *A második ismeretlen értékéért.*

és $z=108$ 1 pont *A harmadik ismeretlen értékéért.*

A kapott értékek kielégítik az egyenletrendszert. 2 pont *Az ellenőrzésért.*

**Összesen: 16 pont**

2. megoldás

Az (1) egyenlet reciprokából vonjuk ki a (3) egyenlet reciprokát:

$$\frac{5x+4y}{xy}-\frac{3y+5z}{yz}=0$$ 4 pont

$$4yz-3xy=0, \qquad y\neq 0$$

Innen: $z=\frac{3}{4}x$ 4 pont *Két ismeretlen arányának meghatározásáért.*

Ezt felhasználva a (2) egyenletből:

$$xy=36x$$

Tehát $y=36 \qquad x\neq 0$ 4 pont *Az ismeretlen numerikus értékéért, az x = 0 kizárásáért.*

Ezt az (1)-be visszaírva: $x = 144$ 1 pont

$z = 108$ 1 pont *A második ismeretlen értékéért. A harmadik ismeretlen értékéért.*

A kapott számhármas kielégíti az egyenletrendszert, mert csak ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre. 2 pont *Az ellenőrzésért.*

**Összesen: 16 pont**

3. megoldás

(1) egyenletből kifejezzük $y$-t:

$$y = \frac{30x}{x-24}$$ 2 pont

(3) egyenletből is kifejezzük y-t:

$$y = \frac{30z}{z-18}$$ 2 pont

Ezek egyenlőségéből:

$$3x = 4z$$ 4 pont *Két ismeretlen arányának meghatározásáért.*

Ezt felhasználva a (2) egyenletből:

$$xy = 36\,x$$

Tehát $y = 36.\quad x \neq 0$ 4 pont *Az ismeretlen numerikus értékéért.*

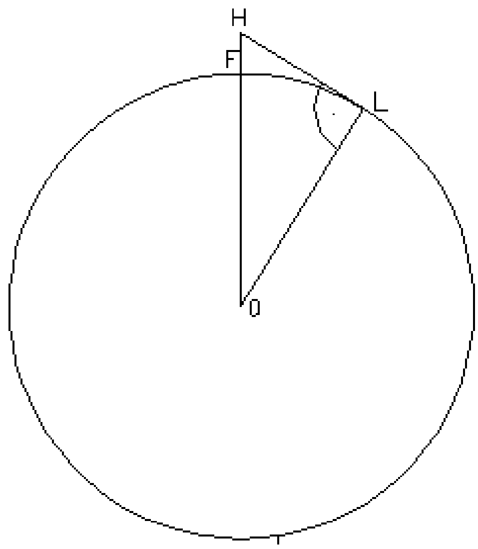
Ezt az (1)-be visszaírva: $x = 144$. 1 pont *A második ismeretlen értékéért.*

$z = 108$ 1 pont *A harmadik ismeretlen értékéért.*

A kapott számhármas kielégíti az egyenletrendszert, mert csak ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre. 2 pont *Az ellenőrzésért.*

**Összesen: 16 pont**

## 9. feladat




**a)**

Rajz 3 pont *A feladat helyes értelmezéséért*

Az eltűnés pillanatában a hajó csúcsát (H) a megfigyelővel összekötő egyenes érintője a földgömbnek, az érintési pont L.
A Föld középpontját O-val jelölve,
OLH derékszögű háromszög, melynek egyik befogója r, átfogója pedig r + 24.
Az LH befogó Pitagorasz-tétellel kiszámolva:

$LH^2 = (r + 24)^2 - r^2$ 1 pont *Az LH érték meghatározásáért*

LH = 17497 m. 1 pont *2 pont jár.*

Tekintettel arra, hogy a HOL szög igen kicsi, az LH távolság jó közelítéssel megegyezik az LF ívhosszal, a megtett út tehát kb. 17,5 km. — 1 pont

(Ennél pontosabb eredményt nincs értelme adni, hiszen a hullámokat, a légköri viszonyokat, a Föld nem tökéletes gömb voltát nem vettük figyelembe.)

*Az a) rész összesen: 6 pont*

**b)**

<u>1. megoldás:</u>

Egy óra alatt elfogy

$y = 1{,}4 + 0{,}005v^2$ tonna üzemanyag.

t óra alatt: $M$ tonna fogy el, ezért

$$t = \frac{M}{y} = \frac{M}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$ — 1 pont

$s = v \cdot t$, ezért a hajó által megtett út:

$$s = \frac{M \cdot v}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$ — 1 pont

Azt kell tudni, hogy ez az út mekkora v esetén lesz a legnagyobb, tehát a függvény maximumát keressük. — 1 pont

A kifejezést átalakítva:

$$s = \frac{M}{\frac{1{,}4}{v} + 0{,}005v}$$ — 2 pont

A tört értéke akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb. — 1 pont

A középértékek közötti nevezetes egyenlőtlenség alapján a nevezőre felírható, hogy:

$$\frac{\frac{1{,}4}{v} + 0{,}005v}{2} \geq \sqrt{\frac{1{,}4}{v} \cdot 0{,}005v}$$ — 1 pont

A jobb oldalon álló kifejezés állandó. — 1 pont

Ezért a bal oldal akkor minimális, ha egyenlőség áll fenn, aminek feltétele:

$$\frac{1{,}4}{v} = 0{,}005v$$ — 1 pont

Ahonnan:

$$v^2 = \frac{1{,}4}{0{,}005} = 280 \qquad v = 16{,}73\,(\text{mérföld/óra})$$ — 1 pont

*A b) rész összesen: 10 pont*

<u>2. megoldás:</u>

Egy óra alatt elfogy
$y = 1{,}4 + 0{,}005v^2$ tonna üzemanyag.

t óra alatt: $M$ tonna fogy el, ezért

$$t = \frac{M}{y} = \frac{M}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$ 1 pont

$s = v \cdot t$, ezért a hajó által megtett út:

$$s = \frac{M \cdot v}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$ 1 pont

Azt kell tudni, hogy ez az út mekkora v esetén lesz a legnagyobb, tehát a függvény maximumát keressük. 1 pont

A szélsőérték meghatározásához deriváljuk a függvényt:

$$s' = \frac{M\left(1{,}4 + 0{,}005v^2\right) - Mv \cdot 0{,}01v}{\left(1{,}4 + 0{,}005v^2\right)^2}$$ 3 pont

Rendezve:

$$s' = M \cdot \frac{1{,}4 - 0{,}005v^2}{\left(1{,}4 + 0{,}005v^2\right)^2}$$ 1 pont

Szélsőérték ott lehet, ahol a derivált nulla:

$$1{,}4 - 0{,}005v^2 = 0$$ 1 pont

$$v^2 = 280$$

$$v = 16{,}73 \text{ (mérföld/óra)}$$ 1 pont

Ezen a helyen az eredeti függvénynek maximuma van, ha a derivált pozitívból negatívba vált előjelet. Ez teljesül, mert a deriváltban a nevező pozitív, a számláló pedig a változó pozitív értékeinél szigorúan monoton csökken, hiszen az ismeretlen együtthatója negatív. 1 pont

*A b) rész összesen: 10 pont*

**Összesen: 16 pont**