

Matematika
Emelt szintű feladatsor

I. rész

1. Adja meg az alábbi egyenlet $[2; 5]$ intervallumba eső megoldásait!

$$4^{x+1,5} - 14 \cdot 2^{x+2} = -96$$

12 pont

2. Egy golyó beszorult egy deszkalapba vágott, kör alakúnak tekinthető lyukba. Szükség lenne a lyuk átmérőjének méretére, de ezt közvetlenül nem tudjuk megmérni. Mérhető azonban a golyó átmérője, amely 56 mm, és az, hogy a golyó 4,8 cm magasan emelkedik ki a deszkalap fölé.

Adja meg a lyuk átmérőjét! A számításához készítsen ábrát!

12 pont

3. Határozza meg a grafikonjuk egyenletével megadott, a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvények értékkészletét! Vizsgálja e függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából, rajzolja meg grafikonjukat derékszögű koordinátarendszerben!

a) $y = x \cdot |x|$

6 pont

b) $y = (\sin x + \cos x)^2$

8 pont

4. Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, németet és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14-en tanulnak, németül 15-en, franciául pedig 11-en. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

13 pont

II. rész

A következő öt feladat (5.– 9.) közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania!

5. Egy trópusi lián hajtása egyre lassabban növekszik, ahogy a növény egyre hosszabb lesz. A kicsírázó magból a növény az első hónapban 100 cm-re nő, és minden további hónapban megközelítőleg az előző havi növekedésének a $4/5$ -ével lesz hosszabb. (A következő kérdésekre adott válaszait indokolja!)

- a) Mennyit fog nőni a 21. hónapban?

5 pont

- b) Hány hónap növekedés után lesz 400 cm-nél hosszabb?

6 pont

- c) Megnöhet-e 600 cm hosszúságúra?

5 pont

6. Egy városban felmérést készítettek családokról, akik közül éppen százat kérdeztek meg. A családban élő fiú, illetve leánygyermek számát az alábbi táblázat készült:

Leányok száma →	0	1	2	3	4
Fiúk száma ↓					
0		11	4	3	2
1	10	15	13	6	1
2	7	9	7	5	0
3	3	2	1	1	0

Tehát például 2 leány és 3 fiú éppen 1 családban van.

- a) Töltse ki az alábbi táblázatot, amelyben a száz család közül a különböző gyermekszám szerint kell csoportosítani:

Gyermekszám	1	2	3	4	5	6	7
Családok száma							

3 pont

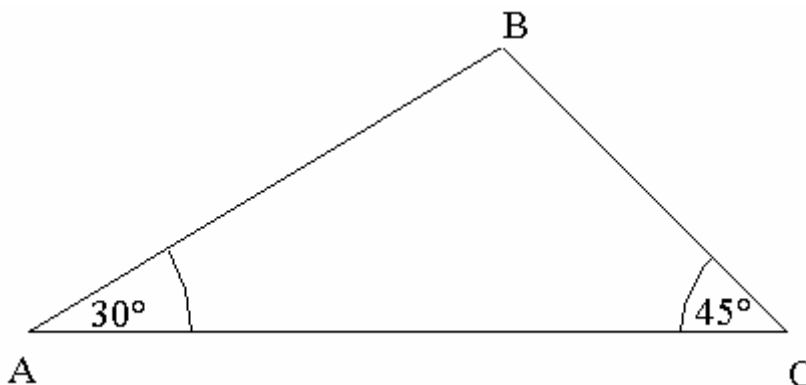
- b) Számítsa ki átlagosan hány gyermek van egy családban. Adja meg a számtani közepet, a mediánt és a móduszt! Válaszát indokolja.

6 pont

- c) Válasszon ki egymás után véletlenszerűen két családot a százból. Mennyi az esélye, hogy mindkét családban legfeljebb 4 gyermek van?

7 pont

7. a) Egy háromszög homlokzatú tetőtérben olyan ablakot akarunk vágni, amely négyzet alakú és a lehető legnagyobb területű. A négyzet nem nyúlhat túl az ABC háromszög határain, csúcsai a háromszög oldalain vannak



A négyzet egyik oldala legyen párhuzamos az AC oldallal, amelynek hossza 8 méter, az A és C csúcsnál lévő szögek pedig 30° és 45° . Mekkora a négyzet oldala?

10 pont

- b) A fenti ablakot négy cég is gyártja. Ezen cégek részesedése a piacon: 15%, 35%, 40% és 10%. A 4 cég termelésének rendre a 3, 5, 1, 10 százaléka selejt. Ha készen veszünk egy ilyen ablakot, akkor mekkora az esélye, hogy a véletlenül kiválasztott ablak selejtes?

6 pont

8. Mely valós számhármások elégítik ki az alábbi egyenletrendszert?

$$\frac{xy}{5x+4y} = 6; \quad \frac{xy}{3x+2z} = 8; \quad \frac{yz}{3y+5z} = 6 \quad x, y, z \neq 0$$

16 pont

9. 1910 júniusában Lisszabon kikötőjéből indult útnak az Arca nevű gőzös. A 120 m hosszú hajó kéményei 24 m magasra emelkedtek a tengerszint fölé. Az óceánt átszelni készülő Arca rakterének tekintélyes részét foglalta el az élelmiszer-, ivóvíz- és italkészlet, valamint az M tonna tömegű tüzelőanyag.

a) Mekkora út megtétele után tűnt el a hajó megfigyelők szeme elől, akik az útját a partról tízszeres nagyítású látcsóval követték?

(A Földet 6 378 300 méter sugarú gömbnek tekinthetjük.)

6 pont

b) A gőzhajó M tonna üzemanyaggal indult útnak. Az óránkénti tüzelőanyag-felhasználás (y tonna óránként) a hajó sebességétől (v csomó, azaz tengeri mérföld/óra) a következő képlet szerint függ:

$y = 1,4 + 0,005v^2$, ahol a képletben szereplő számok a hajó típusától függő állandók.

Mekkora állandó sebességgel kell mennie a hajónak, hogy M tonna tüzelőanyaggal a lehető legnagyobb utat tegye meg?

10 pont