Németh László Városi Matematika Verseny 2016

Hódmezővásárhely

9-10. osztály

2016. április 11.

---

1. Egy városban minden második felnőtt lakosnak van segédmotor kerékpárja, minden ötödik lakosnak személygépkocsija, és minden huszadik embernek nagymotorja. Ha a város felnőtt lakossága 10000 fő, akkor hány olyan felnőtt van, akiknek e járművek közül egyik sincs?

Megoldás:

A feladatot a logikai szita módszerével oldjuk meg.

Ha minden 2. embernek van segédmotorja, akkor ez 5000 főt jelent. 1 pont

Ha minden 5. embernek van személygépkocsija, akkor ez 2000 főt jelent. 1 pont

Ha minden 20. embernek van nagymotorja, akkor ez 125 főt jelent. 1 pont

Ezeket levonjuk 10000-5000-2000-125=2875 fő. 1 pont

De kétszer vontuk le a kettős metszeteket, így ezeket vissza kell adni. 1 pont

Kétszer vontunk le azokat, akiknek segédmotorja és személygépkocsija is van, ez minden tizedik fő, összesen 1000 fő. 1 pont

Kétszer vontunk le azokat, akiknek segédmotorja és nagymotorja is van, ez minden 40. fő, összesen 250 fő. 1 pont

Kétszer vontunk le azokat, akiknek személygépkocsija és nagymotorja is van, ez minden 100. fő, összesen 100 fő. 1 pont

Ezeket visszaadjuk 2875+1000+250+100=4225 fő. 1 pont

De kétszer adtuk hozzá a hármas metszetet, így ezt vissza kell vonni. 1 pont

Kétszer adtuk hozzá a hármas metszeteket, ez minden 200. ember, ez 50 főt jelent. 1 pont

Ezt vissza kell vonni. 4225-50=4175 fő 1 pont

Tehát 4175 főnek ezen járművek közül egyike sincs. 1 pont

2. Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\frac{x+3}{4}-\frac{|x-4|}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+5}{36}$$

MEGOLDÁS:

Szorozzuk be mindkét oldalt 36-tal.

$9(x+3)-4|x-4|=18-(x+5)$ 2 pont

Bontsuk fel a zárójelet.

$9x+27-4|x-4|=18-x-5$ 2 pont

Rendezzük az egyenletet.

$10x+14=4|x-4|$ 3 pont

Ha az abszolút értéken belül nem negatív szám szerepel, akkor egyszerű zárójelre cserélhető.

Azaz, ha $x-4\geq 0$, azaz $x\geq 4$

$10x+14=4(x-4)$ 2 pont

Felbontás és rendezés után: $x=-5$, de ez nem megoldás, ellentmond a feltételnek. 2 pont

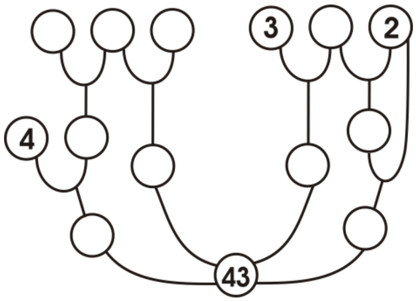
Ha az abszolút értéken belül negatív szám szerepel, akkor egyszerű zárójelre cseréljük és az abszolút értékes kifejezés kap egy negatív előjelet.

Azaz, ha $x-4<0$, azaz $x<4$

$10x+14=-4(x-4)$ 2 pont

Felbontás és rendezés után: $x=\frac{1}{7}$, és ez megfelel a feltételnek. 2 pont

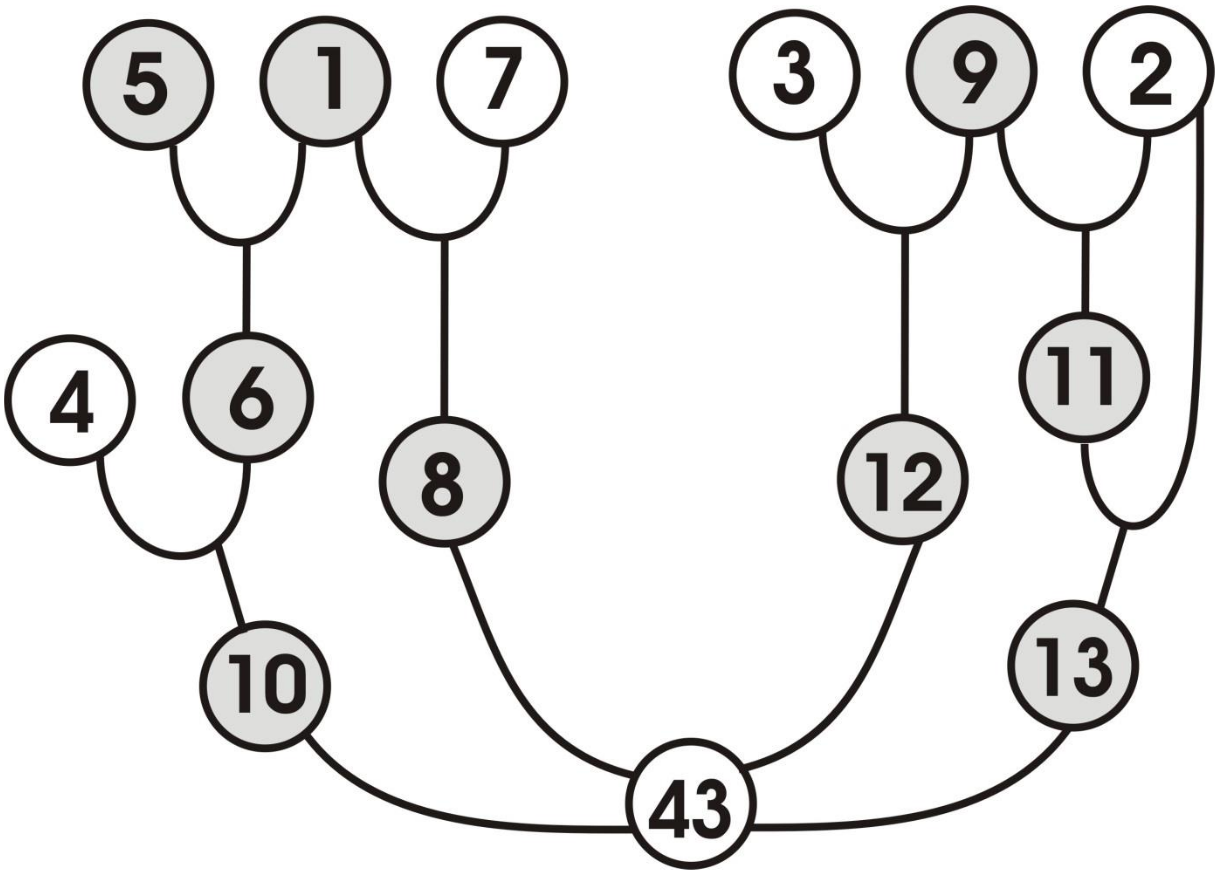
3. A számfán mindegyik levél (kör) a felette hozzá kapcsolódó levelek (körök) összege. Az Ön feladata, hogy kitöltse a számfát az 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 számokkal úgy, hogy minden szám csak egyszer szerepelhet és minden felsorolt számnak szerepelnie is kell.



MEGOLDÁS:

A feladat megoldása abban áll, hogy lehető legkisebb számokkal el kell kezdeni kipróbálni a számfa kitöltését. Azután, ha legalsó eredmény nem megfelelő, meg kell próbálni korrigálni.

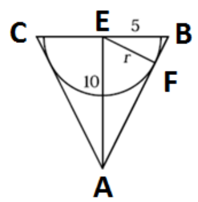
Minden helyesen beírt számért, aminek az egy szinttel feljebbi helyes összege is szerepel a fán 2 pont adható. A teljesen hibátlan fa 20 pontot ér.



4. A fagylaltokat általában kúp alakú tölcsérekbe töltik. A tölcsér magassága 10 cm, a nyitott felén lévő legnagyobb körívének sugara pedig 5 cm. Tegyük fel, hogy a fagylalt gombócok tökéletesen gömb alakúak. Legfeljebb hány cm sugarú lehet az a fagyi gombóc, melynek legalább a fele a tölcsér belsejébe esik?

MEGOLDÁS:

Készítsük el a tölcsérbe helyezett fagyigombóc keresztmetszetét. 1 pont



3 pont

A gömb, az érintési pontban merőleges a tölcsér oldalára. 1 pont

Az *ABC* háromszögben az *AB* oldal kiszámolható Pitagorasz tétel alapján. 1 pont

$10^2 + 5^2 = AB^2$, innen: $AB = 5\sqrt{5}$ 3 pont

Az ábra jelöléseit használva az *ABE* háromszög hasonló az *EFB* háromszöghöz. 1 pont

Mindkettőnek van derékszöge és van egy közös szögük. 2 pont

Ezek alapján a megfelelő oldalaik aránya megegyezik. 1 pont

$$\frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{r}{10}$$ 2 pont

Beszorzás és rendezés után: $r = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ cm 3 pont

5. 2015-ben az egyik üdítőgyártó cég megszüntette a 2 literes üdítők forgalmazását és helyette 1,75 literes üdítőket forgalmaz. A gyártó az új 1,75 literes palackokat az eredeti 2 literes palackhoz hasonló formában hozza forgalomba.
   a. Ha az eredeti 2 literes palack magassága 40 cm volt, akkor az új palack magassága hány cm lesz?
   b. Az termék ára két dologból tevődik össze: a palackban lévő üdítő ára és a palack ára. A gyártó állítása szerint nem változik sem az üdítő egységára, sem a palack méretétől függő előállítási ára. Ezen feltételezés alapján számolja ki, hogy mennyibe kerülhet egy liter tiszta üdítő, ha a kétliteres termék ára 300 Ft-ba, a 1,75 literes termék pedig 265 Ft-ba kerül. (A palack ára a felületének változásával egyenesen arányos.)

      Amennyiben nem sikerül kiszámolni, hogy a hasonlóság következtében hogyan változik a palack felülete, induljon ki abból, hogy a palack felülete az eredetihez képest 80%-ra csökkent.)

MEGOLDÁS:

a. feladat:

Mivel a két test hasonló, így a térfogatuk aránya a hasonlóság arányának köbe. 1 pont

$\lambda^3 = \frac{1,75}{2} = 0,875$, amiből: $\lambda = 0,9565$ 3 pont

Így az új palack magassága 40 cm esetén $40 \cdot 0,9565 = 38,26$ cm 1 pont

b. feladat:

Mivel a két üdítő ital ára nem változott és az ára az üdítőből és a csomagolás árából tevődik össze, így az kell megállapítani, hogy a hasonlóság következtében hányad részére csökkent a csomagoló anyag felülete. (A feltétel szerint a csomagolás ára a felület nagyságával arányos.) 1 pont

Mivel a két test hasonló, így a felszínük aránya a hasonlóság arányának négyzete. 1 pont

Az előző feladatban meghatároztuk a hasonlóságuk arányát, így ennek négyzete lesz a felületük aránya. 1 pont

$\frac{A_{új}}{A_{régi}} = 0,9149$, amiből $A_{új} = 0,9149 \cdot A_{régi}$ 2 pont

Tehát az új felszín az eredeti 0,9149-ed része. 1 pont

Jelöljük x-szel az üdítő árát, és y-nal a palack árát. 1 pont

A feltételek szerint az üdítő mennyisége $\frac{1,75}{2} = 0,875$ -ed részére csökkent, így:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 300 \\ 0,875x + 0,9149y &= 265 \end{aligned}\right\}$$ 3 pont

Ennek az elsőfokú két ismeretlenes egyenletrendszernek a megoldása:

$x = 237,34$ $y = 62,66$. 3 pont

Tehát egy liter üdítő ára: $\frac{237,34}{2} = 118,67$ forint 1 pont

6. Az üzletben kapható gyertyák közül a nagyobbik 16 forintba kerül és pontosan 16 perc alatt ég le. A kisebbik gyertya 7 forintba kerül és pontosan 7 perc alatt ég le teljesen. Nincs óránk, valahogyan mégis szeretnénk az időt mérni, ám a gyertyák égése nem homogén, azaz a gyertyák teljes hosszukban nem egyenletesen égnek le. Ebből az következik, hogy egy félig leégett gyertyánál nem tudunk következtetni arra, hogy az égési idejének fele telt el. A gyertyákat égésük közben bármikor elolthatjuk, és újra meggyújthatjuk. Számítsuk ki, hogy mennyibe kerül az a legolcsóbb kis- és nagy gyertyákból álló szett, amellyel pontosan kimérhető 1 perc!

MEGOLDÁS:

Első lépésként égessük el a nagy gyertyát két kicsivel egymás után. 2 pont

Így a nagy gyertyán marad még $16-2\cdot7=2$ perc

Égessük el a 2 perces nagy gyertyát két kicsivel párhuzamosan. 2 pont

Így 2 db 5 perces gyertyánk keletkezik. 1 pont

Az egyik öt perces gyertyát eloltjuk, a másikat pedig elégetjük két kicsivel. Így lesz 2 db 2 perces gyertyánk. 2 pont

A 2 db 2 perces gyertyából az egyik eloltjuk, és a még megmaradt 5 perces gyertyát meggyútjuk.

2 pont

Amikor a 2 perces gyertya elalszik, addigra az öt perces gyertyából 3 perc marad. 2 pont

Most meggyújtjuk a maradék két perces gyertyát és így a 3 perces gyertyából pont 1 perc fog maradni, amikor a 2 perces gyertya elég. 3 pont

Tehát az egy perces időt kimérő gyertya-szett ára: $16+7\cdot6=58$ forint 2 pont

Kérdéses, hogy ennél tudunk-e olcsóbb szett-et előállítani?

Három eset lehetséges, hogy 58 forintnál tudjunk olcsóbb szett-et előállítani:

Első esetben:

Lehet venni 3 db 16 perces és 1 db 7 perces gyertyát. Ebben az esetben sajnos csak a 9 perces gyertyát tudjuk előállítani. (55 Ft) 3 pont

Második esetben:

Lehet venni 2 db 16 perces és 3 db 7 perces gyertyát. Az előző eset folytatásaként itt már elő tudunk állítani egy 2 perces gyertyát, 9-ből levonva a 7-et, de az öt perces gyertyához már nem lesz további gyertyánk. (53 Ft) 3 pont

Harmadik eset:

Lehet venni 1 db 16 perces és 5 db 7 perces gyertyát. Itt elérhetjük, hogy lesz 1 db 9 perces gyertyánk és 4 db 7 perces gyertyánk. Ebből tudnánk egy 2 perces és 3 db 7 perces gyertyát készíteni. Majd lenne egy 5 perces és 2 db 7 perces gyertyánk. Itt elő tudnánk állítani 2 db két perces gyertyát, de egy újabb öt percesre lenn szükség, hogy elő tudjuk állítani az egyperces gyertyát. (51 Ft)c

Tehát belátható, hogy csak az 58 forintos gyertya a legolcsóbb megoldás, amellyel az 1 perces gyertya előállítható. 3 pont

---

7. Egy új autó bemutatása után az elemzők úgy számoltak, hogy az elkövetkező 5 évben minden évben 10%-kal növekszik az autó induláskori eladásainak számához képest. Sajnos az első évben csak 6%-kal, a második évben csak 8%-kal emelkedett. Ahhoz, hogy az eredeti terveket tartani lehessen az ötödik év végére, a maradék három évben évenként egységesen hány százalékos növekedést kell elérni?

MEGOLDÁS:

Tegyük fel, hogy az elemzők x db autót terveztek eladni az induláskor. 1 pont

Ebből kiindulva az első évben $1,06x$, a második évben $1,08\cdot 1,06x$ db autó kelt el. 2 pont

A következő három évben, minden évben azonosan y %-kal kell növekedni. 1 pont

Azaz: $\left(1+\frac{y}{100}\right)^3 1,08\cdot 1,06x$ 3 pont

Ennek ugyanannyinak kell lenni, mintha öt év alatt minden évben azonosan 10 % -kalnövekedett volna.

2 pont

$1,1^5 x$ 1 pont

Ezeknek a mennyiségeknek meg kell egyezni: $\left(1+\frac{y}{100}\right)^3 1,08\cdot 1,06x = 1,1^5 x$ 1 pont

Innen pedig x -szel való leosztás után megkaphatjuk y -t. 2 pont

$1+\frac{y}{100} = \sqrt[3]{\frac{1,1^5}{1,08\cdot 1,06}} = 1,12$ 3 pont

Innen $y = 12\%$. Tehát 12%-kal kell növekedni az utolsó három évben. 2 pont

---

8. A vállalatok számára sokat jelentenek a könnyen megjegyezhető telefonszámok. Egy telefonszámot könnyen megjegyezhetőnek nevezünk, ha – az előhívó szám nélkül, például 06-20 nélkül – pontosan két különböző számjegyet tartalmaz. Összesen hány ilyen szám van, ha az előhívók nélkül 7 számjegyűek a telefonszámok?

MEGOLDÁS:

Legyen a telefonszámjegyben szereplő két számjegy *a* és *b* 1 pont

Mivel 7 jegyűek a telefonszámok ezért 6 eset különböztetünk meg.

6 db *a* és 1 db *b* számjegy

5 db *a* és 2 db *b* számjegy

4 db *a* és 3 db *b* számjegy

Innentől pedig már *a* és *b* szerepe szimmetrikus. 3 pont

Ezen eseteket pedig ismétléses permutációval számoljuk ki.

$\frac{7!}{6!\cdot 1!}=7$, $\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$ $\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$. Azaz $7+21+35=63$ 6 pont

Vagy: $2^7-2=126$ (Visszavonja azokat az eseteket, amikor minden jegy egyforma.

Ha valaki 2^7 -nel számol, az nem helytálló, mert abban benne van az az eshetőség is, amikor minden jegy egyforma, így a 6 pontot nem kapja meg. Minden egyéb pontot viszont igen.

Mivel *a* és *b* szerepe szimmetrikus, ezért $2\cdot 63=126$ lehetőség van. 2 pont

Most már csak ki kell választani az *a* és *b* számokat. Ezeket pedig $\binom{10}{2}=45$ féleképpen lehet.

4 pont

Tehet összesen $45\cdot 126=5670$ féle ilyen szám van. 2 pont

Megjegyzés:

Elméletileg a mobilszámoknál az előhívó után is állhat nulla, így nyugodtan számolhatunk 10 alatt a kettővel. Ha valamely diák megpróbálja kiszűrni a 0-val kezdődő eseteket – ez jóval bonyolultabb – de jól számol, kapja meg a teljes pontszámot.