Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely, 2019. március 25. - A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

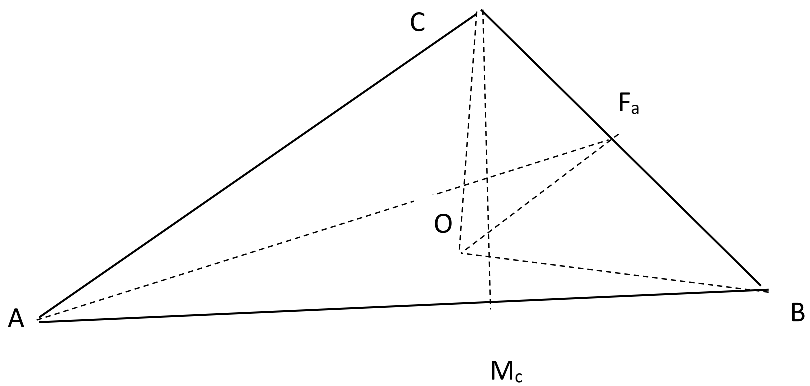
Sz 1. Csak szakközépiskolásoknak		
Vonjunk ki mindkét oldalból 1-et, és vizsgáljuk az $x^2+x-1\leq 0$ egyenlőtlenséget.	1 pont	
A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva a $x^2+x-1=0$ egyenlet gyökei $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ és $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	2 pont	
A két zéróhely között a bal oldal negatív, x_1-nél kisebb és x_2-nél nagyobb értékekre pedig pozitív. Így az egyenlőtlenség megoldása: $x\in\left[(-1-\sqrt{5})/2\ ;\ (-1+\sqrt{5})/2\right]$	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Sz 2. Csak szakközépiskolásoknak		
Jelölje az A -ból B-be vezető úton a vízszintes, emelkedő és lejtős szakaszok hosszait rendre v, e és l. Egyrészt nyilvánvalóan $$v+\ e+l=405$$ Mivel a gépkocsi sebességei az egyes szakaszokon $90, 75$ és $100\ km/h$ voltak, a menetidő pedig A -ból B-be 4.5 óra, az alábbi egyenletet kapjuk: $$\frac{v}{90}+\frac{e}{75}+\frac{l}{100}=4.5$$ A visszaúton az emelkedős és lejtős szakaszok „szerepet cserélnek”, ezért $$\frac{v}{90}+\frac{l}{75}+\frac{e}{100}=4.75$$	3 pont	Természetesen más, a feladat szövegéből helyesen felírt egyenletrendszerért is adható a 3 pont, amennyiben abból megoldható a feladat.
Az egyenletrendszer megoldása $v=180\ km, e=75\ km, l=150 km$	2 pont	Az egyenletrendszer helyes megoldása 2 pont. Számítási hibáért súlyosságtól függően 1-2 pontot vonunk le.
A-ból B felé a vízszintes szakasz 180 km, az emelkedő szakasz 75 km, a lejtős szakasz 150 km.	1 pont	A pont akkor adható, ha a versenyző szöveges választ adott a kérdésre.
Összesen:	**6 pont**	

G-Sz 3. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Az a) Az állítás igaz, ezt két lépésben mutatjuk meg. Először belátjuk, hogy $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Legyen $x \in (A \cup B) \setminus C$. Ekkor definíció szerint $x \in (A \cup B), x \notin C$. $x \in (A \cup B)$ miatt $x \in A$, vagy $x \in B$, legyen pl. $x \in A$. Ekkor $x \notin C$ miatt ismét definíció szerint $x \in A \setminus C$, így $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (nyilván hasonló gondolatmenet alkalmazható $x \in B$ esetén is).	2 pont	Bár a „bizonyítás” nagyon egyszerű, lényegében csak a definíciók alkalmazása, teljes pontszám csak akkor jár, ha a versenyző mindkét irányt igazolja. 2 pont adható, ha a versenyző valamelyik irányt elhagyja. Egyéb, kisebb hiányosságért 1-2 pontot vonjunk le.
Az a) állítás fordított irányának belátásához tfh. $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Ismét nem sértjük az általánosságot, ha föltesszük, hogy $x \in (A \setminus C)$. Definíció szerint $x \in A, x \notin C$. Ezért $x \in (A \cup B), x \notin C$, tehát $x \in (A \cup B) \setminus C$	2 pont	
A b) állítás nem igaz, ezt egy ellenpéldával mutatjuk meg: Legyen $A = \{x, y\}, B = \{x\}, C = \{y\}$. Ekkor a bal oldal $A \setminus (B \cup C) = \{x, y\} \setminus \{x, y\} = \emptyset$, a jobb oldal viszont $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{y\} \cup \{x\} = \{x, y\}$.	2 pont	Természetesen bármilyen egyéb ellenpélda elfogadható, konkrét számpélda is.
Megmutatható ugyanakkor, hogy $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup ((A \setminus C)$. Valóban, ha $x \in A \setminus (B \cup C)$, akkor $x \in A$, $x \notin B$, $x \notin C$. Így viszont , $x \in A \setminus B$, tehát $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.		Ha két versenyző között a végösszesítésben pontegyelőség merül föl, dönthetünk pl. annak javára, aki ezt észrevette.
Összesen:	**6 pont**	

G-Sz 4. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Jelöljük a kifejezés értékét K-val, átrendezés után azt is kérdezhetjük, egész szám-e a megoldása az alábbi elsőfokú egyismeretlenes egyenletnek:	3 pont	A 3 pont akkor adható, ha a versenyző kitér az átalakítás ekvivalenciájának vizsgálatára.

$$\sqrt[3]{2-27\sqrt[3]{25}+9\sqrt[3]{25^2}}=K-\sqrt[3]{25}$$ Az átláthatóság kedvéért jelöljük $\sqrt[3]{25}$-öt a-val és emeljük köbre mindkét oldalt (megtehetjük, a köbre emelés ekvivalens átalakítás): $$2-27a+9a^2=K^3-3aK^2+3a^2K-a^3$$		
Észrevesszük, hogy $K=3$ teljesíti az egyenlőséget. Az eredeti egyenletnek nyilvánvalóan csak egy megoldása lehetett, ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, az eredeti kifejezés értéke $K=3$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

G-Sz 5. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Először meghatározzuk a háromszög szögeit. A szokásos jelöléseket használva: $$\begin{array}{rccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ koszinusz & 0{,}6 & 0{,}577 & 0{,}3846 \\ szinusz & 0{,}8 & 0{,}86 & 0{,}92 \\ szög\ (rad) & 0{,}9273 & 1{,}038 & 1{,}176 \\ szög\ (fok) & 53{,}13 & 59{,}49 & 67{,}38 \end{array}$$ 	3 pont	Az összes szög adatát csak a javítókulcs teljessége érdekében tüntettük itt fel. A 3 pont megadható minden olyan esetben amikor a versenyző kiszámolta valamennyi olyan szög szögfüggvényét és értékét, amely a megoldás további részéhez szükséges. A szögek adatainak számításakor elkövetett hibákért 1-2 pontot vonunk le.

A fenti ábrán jelölje rendre F_a, M_c és O a BC oldal felezőpontját, az AB oldalnak a C-ből induló szögfelezővel vett metszéspontját, illetve a köré írt középpontját. Ezekkel a jelölésekkel, kihasználva, hogy az $\overline{CF_a} = \frac{\overline{BC}}{2}$, az $\overline{AF_a}$ súlyvonal hosszát az $AF_a C$ háromszögre felírt koszinusz-tételből határozzuk meg: $\overline{AF_a}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF_a}^2 - 2\,\overline{AC}\,\overline{CF_a}\,\cos\gamma,$ amiből $\overline{AF_a} = 12{,}97$	2 pont	
A szögfelező meghatározásához kihasználjuk a szögfelező-tételt, mely szerint $$\frac{\overline{AM_c}}{\overline{BM_c}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$ ezért $\overline{AM_c} = \overline{AC}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{BC}} = 7{,}778$	2 pont	A szögfelező helyes meghatározásáért összesen 4 pontot adunk, akkor is, ha más úton határozza meg a versenyző. Más úton is adunk 2 pontot a szögfelező-tétel alkalmazásához hasonló értékes részeredményért.
Ezek után a szögfelező hossza kiszámítható az $AM_c\,C$ háromszögre fölírt koszinusz-tételből: $\overline{CM_c}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AM_c}^2 - 2\,\overline{AC}\,\overline{AM_c}\,\cos\alpha,$ amiből $\overline{CM_c}$ = 11,22	2 pont	
A beírt kör sugarának meghatározásához kihasználjuk azt az ismert tételt, mely szerint a háromszög területe a beírt kör sugarának és a félkerületnek a szorzata.	1 pont	A szögfelezőhöz hasonlóan természetesen itt is elfogadható más gondolatmenet és itt is adhatunk a terület-képlethez hasonló értékes észrevételért 1 pontot.
Másrészt a területet két tetszőleges oldal és a közbezárt szög szinuszának fele, így a következő egyenletet kapjuk (r, s rendre a beírt kör sugara és a félkerület): $$\frac{\overline{AB}\ \overline{AC}\sin\alpha}{2} = rs$$ Amiből behelyettesítéssel a beírt kör sugarára $r = 4$	2 pont	
A köré írt kör R sugarának meghatározásához kihasználjuk, hogy definíció szerint $R = \overline{OB} = \overline{OC}$, így az OBC háromszög egyenlő szárú. Észrevesszük továbbá, hogy (szintén definíció szerint) a háromszög köré írt körben a BOC középponti szög és a BAC kerületi szög közös íven nyugszanak, ezért a középponti és kerületi szögek tétele értelmében $BOC_\sphericalangle = 2BAC_\sphericalangle = 2\alpha$	2 pont	Az előzőekhez hasonlóan természetesen itt is elfogadható más gondolatmenet és itt is adhatunk értékes észrevételért részpontszámot (2 pontot).
Így viszont $COF_{a\,\sphericalangle} = \alpha$, ezért a köré írt kör sugara $R = \overline{OB} = \frac{\overline{CF_a}}{\sin\alpha}$ =8,13	2 pont	
Összesen:	**16 pont**	

G-Sz 6. <u>Gimnazistáknak és szakközépiskolásoknak</u>		
Vezessük be az a $:= \sin x$ jelölést. Kihasználva, hogy a $\sin x$ függvény a $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő (így egy-egy értelmű) és értékkészlete $[-1,1\,]$, a kérdés tulajdonképpen az, hogy az $$a^2+a+p=0$$ egyenletnek mikor van pontosan egy gyöke a $[-1,1\,]$ intervallumon.	2 pont	Ha nem vezet be a versenyző új változót, de egyébként jó a gondolatmenet, akkor is jár a 2 pont.
Alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét az a-ra mint ismeretlenre: $$a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4p}}{2}$$ Az egyenletnek akkor van valós gyöke, ha $1-4p\geq 0$, azaz $p\leq\frac{1}{4}$ A továbbiakban feltesszük, hogy $p\leq\frac{1}{4}$ teljesül	2 pont	Csak akkor adható pont, ha a versenyző megvizsgálta a gyök létezésének feltételét
$p=\frac{1}{4}$ esetén a két gyök egyenlő és $a_1=a_2=-\frac{1}{2}$, ekkor tehát az eredeti egyenletnek egy gyöke lesz.	1 pont	Megadható az 1 pont, ha a versenyző megvizsgálta a feltételt, megállapította, hogy a két gyök egyenlő, de nem sorolta a „pontosan egy gyök” esetbe (arra való tekintettel, hogy ilyenkor tkp. két gyök van, amelyek egyenlők)
Vizsgáljuk most meg, hogy az $a_1=\frac{-1-\sqrt{1-4p}}{2}$ gyök a p mely értékei mellett esik a $[-1,1\,]$ intervallumba. Ehhez a $$-1\leq\frac{-1-\sqrt{1-4p}}{2}\leq 1$$ kettős egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Átrendezve: $$1\ \geq\sqrt{1-4p}\geq -3$$ A jobb oldali egyenlőtlenség nyilván teljesül és elhagyható, hiszen $p\leq\frac{1}{4}$ miatt a gyökkifejezés értelmezett és nemnegatív. Ugyanezen ok miatt a bal oldali egyenlőtlenség négyzetre emelhető, azaz $$1\ \geq 1-4p$$ ami akkor teljesül, ha p $\geq$0. Összefoglalva, az egyenlet kisebbik gyöke akkor esik a $[-1,1\,]$ intervallumba, ha $0\leq p\leq\frac{1}{4}$	2 pont	

Vizsgáljuk most az $a_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2}$ gyököt, azaz a $$-1 \leq \frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2} \leq 1$$ kettős egyenlőtlenséget. Rendezve: $$-1 \leq \sqrt{1-4p} \leq 3$$ $p \leq \frac{1}{4}$ miatt a gyökkifejezés értelmezett és nemnegatív, így a bal oldali egyenlőtlenség triviálisan teljesül. A jobb oldali egyenlőtlenség esetén a feltételek miatt ekvivalens átalakítás a négyzetre emelés. Elvégezve, majd rendezve: $p \geq -2$. Kapjuk, hogy az egyenlet nagyobbik gyöke akkor esik a $[-1,1]$ intervallumba, ha $-2 \leq p \leq \frac{1}{4}$	2 pont	
Látjuk tehát, hogy $0 \leq p < \frac{1}{4}$ esetén a másodfokú egyenlet mindkét gyöke a $[-1,1]$ intevallumba esik, míg $-2 \leq p < 0$ esetén csak $a_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2}$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe, az eredeti egyenletnek $-2 \leq p < 0$ és $p = \frac{1}{4}$ esetén van pontosan egy gyöke és ilyenkor a gyök $x = \arcsin\frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2}$	2 pont	Ez a 2 pont csak a világos összefoglaló válaszért jár.
Összesen:	**11 pont**	

G 7. Csak gimnazistáknak		
A logaritmusfüggvény tulajdonsága miatt az egyenlet mindkét oldala akkor és csak akkor értelmezett, ha $x > 0$.	1 pont	
Alkalmazzuk a logaritmus ismert azonosságát a bal oldalra, térjünk át 2018-as alapra: $$\log_{2018}(\log_{2019} 2018x) = \frac{\log_{2018} 2018x}{\log_{2018} 2019} = \frac{1+\log_{2018} x}{\log_{2018} 2019}$$	2 pont	Általában akkor jár a 3 pont, ha a versenyző sikeresen visszavezeti a feladatot egy egyszerűen kezelhető, elsőfokú egyenletre
Az áttekinthetőség érdekében bevezetjük az $a := \log_{2018} 2019$ és $y := \log_{2018} x$ jelöléseket, így az egyenlet a következőképp alakul: $$\frac{y+1}{a} = a + y$$	1 pont	
Az egyenletet y-ra, mint ismeretlenre megoldva:	3 pont	A megoldásra mind a 3

$$y = -a - 1$$ amiből visszahelyettesítve: $$\log_{2018} x = -\log_{2018} 2019 - 1$$ Majd pedig mindkét oldalt 2018-adik hatványra emelve és a logaritmus definícióját, valamint a logaritmus ismert azonosságait alkalmazva $$x = 2018^{-\log_{2018} 2019 - 1} = \frac{1}{2018^{\log_{2018} 2019}} \frac{1}{2018} = \frac{1}{2019} \frac{1}{2018}$$ Kapjuk tehát, hogy az eredeti egyenlet egyetlen megoldása $$x = \frac{1}{2018 \cdot 2019}$$		pont csak akkor jár, ha a versenyző a lehető legegyszerűbb $x = \frac{1}{2018 \cdot 2019}$ alakban adja meg. Ha a megoldás más alakú, de helyes, akkor egy pontot vonjunk le.
Összesen:	**7 pont**	

G 8. <u>Csak gimnazistáknak</u>		
Megmutatjuk, hogy Anna ki tudja találni, mik voltak a gondolt számok. Tegyük föl, hogy Béla az $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ számokra gondolt (a nagyság szerinti rendezés pusztán jelölés kérdése, nem sérti az általánosságot) Gondolatmenetünk lényege a következő: Sorba rendezzük a papírra írt $2^n - 1$ összeget, legyenek ezek $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{2^n-1}$. Mivel minden gondolt szám nemnegatív, a papírra leírt összegek közül a legkisebbnek x_1-nek kell lennie, a második legkisebbnek pedig x_2-nek (hiszen bármilyen mást összeget képezünk, azok a két legkisebbnél csak nagyobbak vagy velük egyenlők lehetnek). Nyilvánvaló tehát, hogy $x_1 = s_1$ és $x_2 = s_2$	2 pont	A két legkisebb szám sikeres azonosításáért adjunk 1 pontot, akkor is, ha a versenyző nem viszi tovább a gondolatmenetet.
Karikázzuk be most s_1-et és s_2-t, továbbá keressük meg az s-ek között $x_1 + x_2$-t és *húzzuk át* (nem biztos, hogy a harmadik legkisebb összeg, de ez nem probléma, megkeressük a listában és áthúzzuk). A továbbiakban az s-eket tartalmazó listában háromféle szám lesz: - bekarikázott, ezek a már „kitalált” gondolt számok - áthúzott, ezek a már kitalált gondolt számokból képezhető összegek - jelöletlenek, ezek vagy még ki nem talált gondolt számok, vagy a belőlük és a és a korábbi gondolt számokból képezhető összegek Nyilvánvaló, hogy a következő lépésben az át nem húzott összegek közül a legkisebb x_3 lesz. Így egyrészt bekarikázhatjuk x_3-at, másrészt áthúzhatjuk $x_1 + x_3$-at, $x_2 + x_3$-at és $x_1 + x_2 + x_3$-at. Ezt az eljárást ismételjük mindaddig, amíg marad jelöletlen szám: i-edik lépésben a még jelöletlen számok közül x_i lesz a	6 pont	Akkor jár a 6 pont, ha a versenyző dolgozatából világosan látható, hogyan folytatható az eljárás.

legkisebb. Bekarikázzuk x_i-t és áthúzunk minden olyan számot, ami $S + x_i$ alakú, ahol S a korábban bekarikázott számok, vagyis az $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ számok valamely részhalmazának összege. Az eljárást n lépésen át folytatva a végén a bekarikázott számok pontosan a gondolt $\{x_1, \dots, x_n\}$ számok lesznek.		
Összesen:	**8 pont**	