Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2016. április 11.

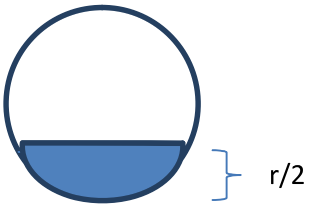
A 11-12. osztályosok feladatai

Feladatok csak szakközépiskolásoknak

Sz 1. Egy medencét három csap segítségével lehet megtölteni. Az első kettő együtt 1,2 óra alatt, a második és harmadik együtt 2 óra alatt, az első és harmadik pedig másfél óra alatt tölti meg a medencét. Mennyi idő szükséges a medence feltöltéséhez az egyes csapoknak külön-külön, illetve mennyi időt vesz igénybe a feltöltés, ha mindhárom csapot egyszerre kinyitják?

(7 pont)

Sz 2. Egy henger alakú, vízszintesen fekvő tartály a keresztmetszet sugarának feléig van megtöltve, az ábra szerint. A tartály térfogatának hány százalékát foglalja el a folyadék?



(6 pont)

Feladatok szakközépiskolásoknak és gimnazistáknak

G-Sz 3. Egy szerencsés nyertes úgy dönt, hogy a lottón nyert 10 millió forintját állandó, évi 4% kamatozású bankbetétbe helyezi és a betétből az elhelyezéstől számított első hónappal kezdődően minden hónapban azonos összegű járadékot vesz fel. A bank az éppen a számlán lévő összegre havonta fizet kamatot, minden hónapban az éves kamatláb tizenketted részének megfelelően[1]. Hány hónapon keresztül tart ki a nyertes pénze, ha a havi járadék összege (az utolsó havi, esetleg töredék összeget is beleértve)

a) 100 ezer forint
b) 250 ezer forint?

(8 pont)

FORDÍTS!

[1] Az első hónap végén a teljes összeg kamatozik, a második hónap végén a kamattal növelt összeg mínusz az első hónap végén felvett járadék, stb.

G-Sz 4. Egymást keresztező kelet-nyugati és észak-déli országutakon két autó halad egyenletes sebességgel. $t = 0$ időpontban az egyik autó a kereszteződéstől nyugatra *A* távolságban van és *u* sebességgel kelet felé tart, a másik autó a kereszteződéstől *B* távolságra délre található és *v* sebességgel északnak tart. Mennyi idő elteltével lesz a távolságuk minimális?

(8 pont)

G-Sz 5. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}$ függvényt.

a) Határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezett!
b) Határozza meg a függvény értékkészletét!
c) Adja meg a függvény zéróhelyeit és globális szélsőértékeit (ha vannak).
d) Készítsen vázlatot a függvény grafikonjáról!

(7 pont)

G-Sz 6. Bizonyítsa be (számológép és függvénytáblázat nélkül), hogy az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ szabályos kilencszögben $\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_5}$, azaz az oldal és legrövidebb átló hosszának összege a leghosszabb átló hosszával egyenlő.

(7 pont)

Feladatok csak gimnazistáknak

G 7. Határozzuk meg (a tízes számrendszerben) 2^{2016} utolsó két számjegyét!

(8 pont)

G 8. Bizonyítsa be, hogy bármely pozitív természetes n számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség[2]:

$$1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n^n} \leq \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(8 pont)

[2] A versenyen kiadott feladatlap a bizonyítandó állítást tévesen, szigorú egyenlőtlenséggel tartalmazta, ami n=1 esetén nem teljesül (minden más esetben igen). A tévedésért elnézést kérünk.