1. Az autógyártók előírnak az autó felnijéhez egy gumiméretet, amihez ragaszkodni kellene. De sokan szeretik a nagyobb felnit, vagy a szélesebb gumiabroncsot. Az autógumik méretét három számmal szokták jelezni. Például: 195/65/R15. Az első szám a gumi szélessége mm-ben, a második szám a gumi oldalfalának magassága a szélesség százalékában, a harmadik a felni átmérője collban. 1 coll körülbelül 25,4 mm. Ha el szeretnék térni e méretektől, akkor választhatunk másik gumit (ezt hívják váltóméretnek), de a kerék teljes átmérője (felni + gumi) nem térhet el az eredeti méret plusz/mínusz 2,5%-nál. A gumik szélességének méretezése 125 mm-től kezdődik, és 10 mm-ként növekszik 355 mm-ig.

    a. A fenti példában említett gumi esetén, ha megtartjuk az R15-ös méretet, az oldalfalmagasságot 60-asnak választjuk, akkor legfeljebb milyen széles gumit tudunk tenni az autóra?

    b. Ha R16-os felnit és 55-ös oldalfalmagasságot választunk, akkor legfeljebb mennyi lehet a gumi szélessége?

(10 pont)

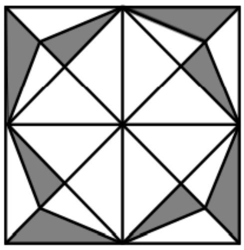
MEGOLDÁS:

Először számítsuk ki a kerék méretét: Az oldalfal magasság 195 65%-a, ami 126,75 mm. Ez kétszer. A felni átmérője 15 coll, ami 381 mm. Így a teljes kerékátmérő 634,5 mm. Ezt megnöveljük 2,5%-kal, 650,36. Ezt nem léphetjük át. 2 pont

a) feladat: Ha x mm a gumi szélessége, akkor az oldalfalmagasság 0,6x. Ez kétszer, 1,2x. Ehhez jön a kerékátmérő 381 mm. Tehát $1{,}2x+381<650{,}36$, amiből $x<224{,}45$. A legnagyobb 5-re végződő szélességméret, ami teljesíti az a 215 mm szélesség. 4 pont

b) feladat: Ha megnöveljük a felni átmérőjét, akkor 406,4 mm lesz a felni. Ha x mm a gumi szélessége, akkor az oldalfalmagasság 0,55x. Ez kétszer 1,1x. Tehát $1{,}1x+406{,}4<650{,}36$. Amiből $x<221{,}78$. A legnagyobb 5-re végződő szélességméret, ami teljesíti az a 215 mm szélesség. 4 pont

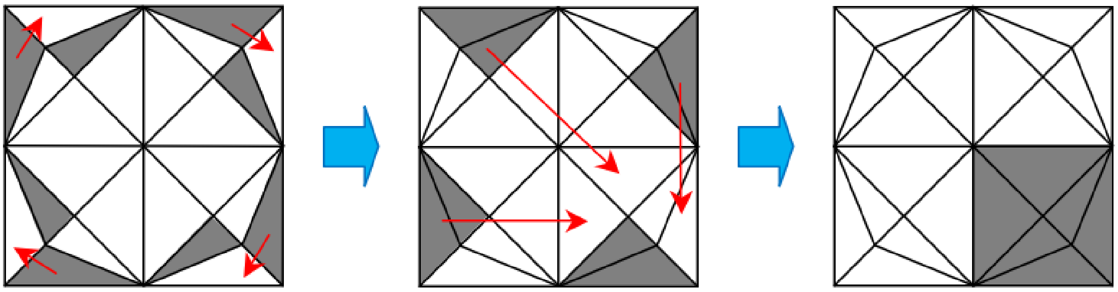
2. Az oldalsó ábrán található négyzetben egy szabályos nyolcszög van. A külső négyzet oldalának hossza 10 egység hosszú. Számítsa ki a besatírozott síkidomok összterületét!



(10 pont)

MEGOLDÁS:

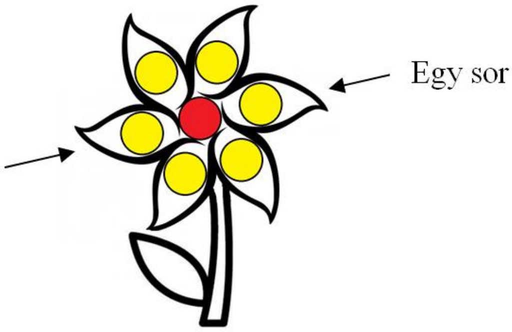
Alkalmazzuk az alábbi átforgatásokat:



2+2+2 pont

Így a szürke rész területe negyede az eredeti területnek. 4 pont

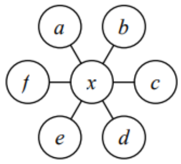
3. Készítsen vázlatot az oldalsó számvirágról, majd a vázlatba írja be az 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11 számjegyeket úgy, hogy minden körbe csak egy szám írható, és minden számot fel kell használni a listából. Továbbá érvényes a következő szabály: minden egy sorban álló karika-hármas azonos összegű számhármasokat tartalmazhat. Kérdés: mennyi ez az összeg, és melyik szám kerül a virág közepébe?



(15 pont)

MEGOLDÁS:

Kövessük a mellékelt ábra jelöléseit! Így az alábbi összegeket tudjuk felírni:



$a+x+d=M$, $b+x+e=M$, $c+x+f=M$

1 pont

Összeadva a három egyenletet: $a+b+c+d+e+f+x+2x=3M$ 2 pont

Viszont tudjuk, hogy: $a+b+c+d+e+f+x=1+2+3+5+7+9+11=38.$ 2 pont

Ezeket figyelembe véve: $38+2x=3M$, azaz baloldalnak oszthatónak kell lennie 3-mal.

Így x lehetséges értékei a számok közül: 2, 5, 11 4 pont

Ha x=5, akkor M=16. Az viszont nem lehet, mert 16-5=11. A 11-es számnak nem tudunk párt találni. 2 pont

Ha x=11, akkor M=20. Akkor 20-11=9. Így a 9-esnek nem tudunk párt találni. 2 pont

Ha x=2, akkor az M=14. Így viszont már kitölthető a számvirág 2 pont

Amennyiben a tanuló helyes próbálkozással megadja az összeget és a középső számot, akkor kapja meg a maximális pontszámot!

4. Artúr király 25 lovagja tanácskozik a kerekasztalnál. A környéken ólálkodó sárkány elpusztítására 3 lovagot választottak ki maguk közül. (Bármely lovag kiválasztása ugyanolyan valószínűségű). Legyen P annak a valószínűsége, hogy a három kiválasztott lovag közül kettő biztosan egymás mellett ül. Ha a P valószínűséget tört alakban adjuk meg, (egyszerűsített formában), akkor mennyi lesz a számláló és a nevező összege?

(15 pont)

MEGOLDÁS:

25 lovagból 3-at kiválasztani $\binom{25}{3}$ féle képpen lehet. Ami egyszerűsítés után 25*23*4.

2 pont

A kedvező eseteket két részre bontjuk. Vagy (a) mind a három egymás mellett van, vagy (b) kettő van egymás mellett egy pedig nem. 2 pont

Az (a) esetben 25 lehetőség van. (1,2,3), (2,3,4), … , (25,1,2). 2 pont

A (b) esetben 25 lehetőség van két egymás mellett ülő lovagot választani. Azaz (1,2), (2,3), …, (25,1). Minden párhoz 21 lehetőség van egy lovagot választani. Kivéve a pár két szomszédos lovagját. Pl. (15, 16) esetében a maradék 23-ból nem választható 14 és a 17. Tehát marad 21 lehetőség minden esethet. Azaz 25*21. 4 pont

Az első két esetet összefogva a kedvező esetek száma: 25+(25*21)=25*22. 2 pont

Így a keresett valószínűség: $\frac{25\cdot 22}{25\cdot 23\cdot 4}=\frac{11}{46}$ 2 pont

A keresett összeg: 11+46=57 1 pont

A feladatnak bármilyen helyes megoldása teljes pontszámot ér

5. Egy repülőgép széllel szemben repült Revnar városából Filid városába, és az utat 84 perc alatt tette meg. Ugyanebben a szélben a visszaút 9 perccel rövidebb volt, mintha szélcsend lett volna. Mennyi ideig tartott a visszaút?

(20 pont)

MEGOLDÁS

Jelöljük a távolságot d-vel, a repülő sebességét r-rel, a szél sebességét s-sel. A v=s/t összefüggésből út/sebesség adja az időt.

Azaz $\frac{d}{r-s}=84 \Rightarrow d=84r-84s$, valamint $\frac{d}{r+s}+9=\frac{d}{r}$ 3 pont

A másodikba behelyettesítve a d-t: $\frac{84r-84s}{r+s}+9=\frac{84r-84s}{r} \Rightarrow \frac{93r-75s}{r+s}=\frac{84r-84s}{r}$

3 pont

Mindkét oldalt beszorozva a nevezőkkel: $93r^2-75rs=84r^2+84rs-84rs-84s^2$ 4 pont

Amiből: $9r^2-75rs+84s^2=0 \Rightarrow 3r^2-25rs+28s^2=0 \Rightarrow (3r-4s)(p-7w)=0$ 5 pont

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

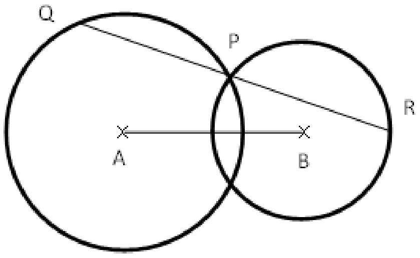
Azaz $r=\frac{4}{3}s$ vagy $r=7s$ 2 pont

Ezt felhasználva, ha $r=\frac{4}{3}s$, akkor $\frac{d}{r}=\frac{84r-84s}{r+s}=\frac{112s-84s}{\frac{4}{3}s+s}=\frac{28s}{\frac{7}{3}s}=\frac{28}{\frac{7}{3}}=28\cdot\frac{3}{7}=12$

Valamint: ha $r=7s$, akkor $\frac{d}{r}=\frac{84r-84s}{r+s}=\frac{588s-84s}{8s}=\frac{504s}{8s}=63$ 2 pont

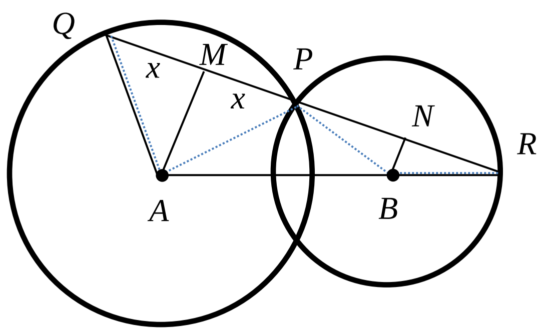
Tehát 63, vagy 12 percig. 1 pont

6. Az alábbi ábrán egy 8 és egy 6 egység sugarú kör metszi egymást úgy, hogy a körök középpontja 12 egység távolságra van egymástól. Legyen P a körök két metszéspontja közül az egyik. Húzzunk P ponton áthaladó egyenest a két kört metszve úgy, hogy a két körben keletkezett húrok (QP és PR) egyenlő hosszúak legyenek. Adjuk meg QP húr hosszának négyzetét!



(20 pont)

MEGOLDÁS



Használjuk a mellékelt ábrát! 2 pont

Az AQP és az BPR háromszögek egyenlőszárúak, melyekben a magasságok felezik az alapokat, így $QM = MP = PN = NR = x$ 4 pont

BNR és az AMR háromszögek hasonlóak, mivel van egy derékszögük és egy közös szögük, amiből a hasonlóság aránya 3. $\left(\frac{AR}{BR} = \frac{18}{6}\right)$

2 pont

Legyen $y = BN$, ekkor $AM = 3BN = 3y$. 2 pont

A BNR háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt: $x^2 + y^2 = 6^2 = 36$ 2 pont

Hasonlóan a QMA háromszögben: $x^2 + (3y)^2 = 8^2 = 64$. 2 pont

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$8y^2 = 28 \Rightarrow y^2 = 3,5$. 2 pont

Ezt az első egyenletbe helyettesítve: $x^2 + 3,5 = 36 \Rightarrow x^2 = 32,5$ 2 pont

$\overline{QP}^2 = (2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot 32,5 = 130$ 2 pont

7. Az x és y valós számokról tudjuk, hogy $x+y=1$. Igazoljuk hogy $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

(25 pont)

MEGOLDÁS:

Végezzük el a zárójel felbontását!

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}\geq 9$$

2 pont

$$\frac{xy+x+y+1}{xy}\geq 9$$

2 pont

$$\frac{xy+2}{xy}\geq 9 \Rightarrow 1+\frac{2}{xy}\geq 9 \Rightarrow \frac{2}{xy}\geq 8$$

2+2+2 pont

$$1\geq 4xy$$

Ezt kell igazolni.

Felhasználva számtani mértani közép közötti összefüggést kapjuk, hogy:

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{(x+y)^2}{4}\geq xy\Rightarrow(x+y)^2\geq 4xy$$

10 pont

A kiindulási feltételt figyelembe véve: $x+y=1$, kapjuk, hogy $1\geq 4xy$

5 pont

8. Adott kerületű körcikkek közül melyiknek van a legnagyobb területe?

(25 pont)

MEGOLDÁS:

A körcikk kerülete legyen $k=i+2r$, ahol i az ívhossz, r pedig a sugár. 4 pont

A körcikk területe: $t=\frac{ri}{2}$. Az ívhossz a kerület és a sugár függvényében: $k-2r$. Ezt helyettesítsük be a területképletbe. 5 pont

$t=\frac{r(k-2r)}{2}=-r^2+\frac{k}{2}r$, ahol k az adott kerület. Ennek az r-től függő másodfokú függvénynek kell megkeresni a maximumát. (Mivel a négyzetes együttható negatív.)
5 pont

Alakítsuk teljes négyzetté:

$t=-\left(r-\frac{k}{4}\right)^2+\frac{k^2}{16}$. 5 pont

Maximuma tehát ott van, ahol $r-\frac{k}{4}=0$, azaz sugár a kerület negyede. 6 pont

Ekkor az ív 2r, így a középponti szög 2 radián, ami kb. 114,6°

Utóbbi számolás csak érdekesség.

HA VALAKI konkrét húr értékkel helyes megoldást készít, azaz kimondja, hogy a sugár a kerület negyede, akkor 20 pontot kapjon.