

# Matematikai logika

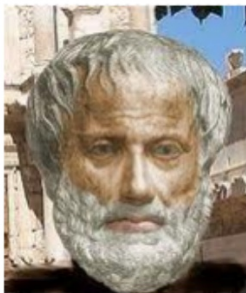
TK. 8.oldal

„Ohó álljunk csak meg. Ön azt mondja, a rögeszmém, hogy őrült vagyok. De hiszen tényleg az vagyok, az imént mondta. De hiszen akkor ez nem rögeszme, akkor az egy logikus gondolat. Tehát nincs rögeszmém. Tehát mégse vagyok őrült. Tehát csak rögeszme, hogy őrült vagyok, tehát rögeszmém van, tehát őrült vagyok, tehát igazam van, tehát nem vagyok őrült. Mégiscsak gyönyörű dolog a tudomány!”

(Karinthy Frigyes: Betegek és bolondok)

A logika tudománnyá válása az ókori Görögországban kezdődött. Maga a logika szó is görög eredetű, a *logosz* szó jelentése: szó, fogalom, ész, szabály. Kialakulása *ánhoz* köthető, hogy már az első tudósok, filozófusok, sőt még politikusok (Régi szép idők!) is törekedtek arra, hogy gondolataikat világos, logikailag helyes formában közöljék.

[http://fizika.mechatronika.hu/matek/matlogweb/14\\_matlog\\_kezdetei.pdf](http://fizika.mechatronika.hu/matek/matlogweb/14_matlog_kezdetei.pdf)



Arisztotelész (i.e. 384-322)



Gottfried Wilhelm Leibniz  
(1646-1716)



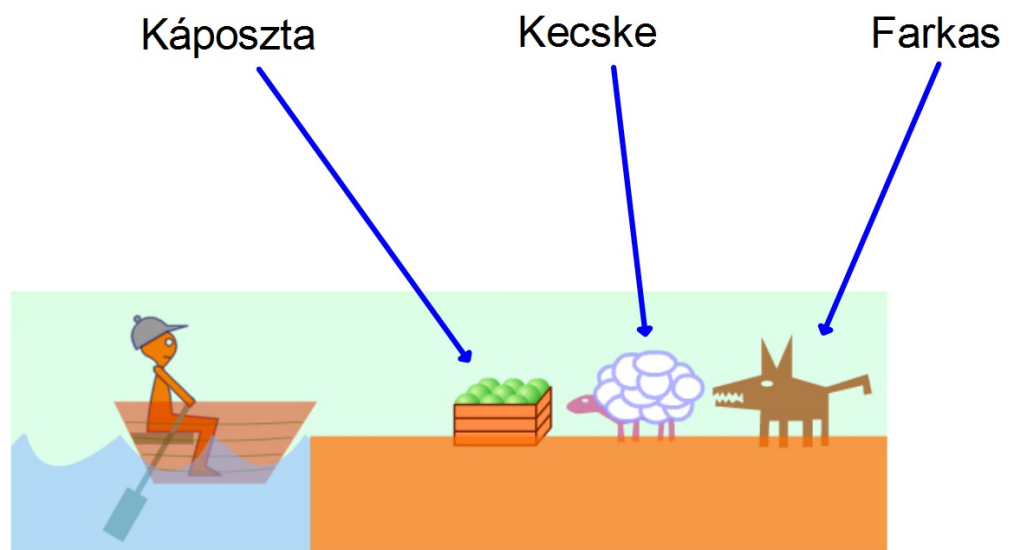
George Boole  
(1815-1864)



Augustus de Morgan  
(1806-1871)



Friedrich Ludwig Gottlob Frege  
(1848-1925)



A borbély minden olyan embert megborotvál a városban, aki nem maga borotválkozik.  
Megborotválja-e magát a borbély?

A matematikai logika ítéletekkel foglalkozik.

### Definíció

**Ítélet:** Olyan állítás, amelyről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igaz, vagy hamis. Tehát egy állítás vagy igaz, vagy hamis. Harmadik lehetőség nincs. Az állításokat az ábécé nagybetűivel jelöljük.

A = Az 5 prímszám. (ítélet)

B = Végtelen sok prímszám létezik. (ítélet)

C = Karcsi jó tanuló. (nem ítélet)

Ellentmondástalanság elve:

A harmadik kizárásának elve:

**1. példa** Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!

A: A 12 páros szám.

B: Ma szerda van.

C: Most itt havazik.

D: Minden prímszám páratlan.

E: Az ikerprímszámok száma végtelen.

A logikai értéke:  $|A| = i$

## Logikai műveletek :

### 1. Negáció (tagadás)

#### Definíció

**Egy állítás tagadásán** (negációján, ellentettjén, angolul „NOT”) azt az állítást értjük, ami igaz, ha az eredeti állítás hamis és hamis, ha az eredeti állítás igaz. Jele:  $\neg A$ .

A logikában a tagadást egyváltozós műveletnek tekintjük, aminek igazságtartalma csak az eredeti állítás igazságtartalmától függ. Mindezt egyszerűen kifejezhetjük egy táblázattal, ami minden esetet tartalmaz.

A	$\neg A$
i	h
h	i

A negáció jele:  $\neg$

A	$\neg A$
i	h
h	i

A kettős tagadás törvénye

$$\neg\neg A = A$$

B = Minden fiú szereti a focit.

• Válassza ki a fenti állítás tagadását az alábbiak közül!

1. Van olyan fiú, aki szereti a focit.
2. Nincs olyan fiú, aki szereti a focit.
3. A lányok szeretik a focit.
4. Van olyan fiú, aki nem szereti a focit.
5. A lányok nem szeretik a focit.

7B = 4.

C = Van olyan gyermek aki nem szereti a csokit.

TC = Minden gyermek szereti a csokit.

## 2. Konjunkció (összekapcsolás)

Ha  $A$  és  $B$  két kijelentés, akkor ezek konjunkcióját  $A \wedge B$ -rel jelöljük és igaz értékű az  $A$  és  $B$  kijelentést.

### Definíció

A **logikai és** (konjunkció, angolul „AND”) olyan kétváltozós logikai művelet, ami csak akkor igaz, ha a benne szereplő mindkét állítás igaz. Jelölése:  $A \wedge B$ , vagy  $A \& B$ .

(Ha két kijelentést az és logikai művelettel kapcsolunk össze, akkor az így kapott összetett állítás csak akkor igaz, ha mindkét állítás igaz. Ezt fejezi ki a táblázat.)

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

$$|A \wedge B| = \begin{cases} i, & \text{ha } |A| = |B| = i \\ h, & \text{különben} \end{cases}$$



**2. példa** Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!

A: A derékszögű háromszög leghosszabb oldala az átfogó, és a legnagyobb szöge derékszög.

B: A 3 prímszám és a 11 osztható 3-mal.

C: A  $90^\circ$ -nak nem értelmezhető a tangense és a kotangense.

D: A háromszög belső szögeinek összege  $360^\circ$ , és a külső szögek összege pedig  $180^\circ$ .

$$B = A \underbrace{\text{3 prímszám}}_i \text{ és } a \underbrace{\text{11 osztható 3-mal}}_h. \quad |B| = h$$

### 3. Diszjunkció (szétválasztás, VAGY)

(megengedő vagy)

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

$$|A \vee B| = \begin{cases} h, & \text{ha } |A| = |B| = h \\ i, & \text{különben} \end{cases}$$

Ha A és B két kijelentés, akkor ezek diszjunkcióját  $A \vee B$ -vel jelöljük és rajta értjük az A vagy B kijelentést.

#### Definíció

A **logikai vagy** (diszjunkció, angolul „OR”) olyan kétváltozós logikai művelet, ami akkor hamis, ha a benne szereplő mindkét állítás hamis. Jele:  $A \vee B$ .

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

**3. példa** Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!

A: A 63-nak a 3 vagy a 7 osztója.

B: A 63-nak a 3 vagy a 13 osztója.

C: A 63-nak a 2 vagy a 7 osztója.

D: A 63-nak a 2 vagy az 5 osztója.

A = A 63-nak a 3 vagy a 7 osztója

|A| = i

B = A 63-nak a 3 vagy a 13 osztója.

|B| = i

|i v h| = i

D = A 63-nak a 2 vagy az 5 osztója

|D| = h

|h v h| = h

$$\begin{array}{llll} \neg i = h; & \neg h = i; & & \\ i \wedge i = i; & i \wedge h = h; & h \wedge i = h; & h \wedge h = h; \\ i \vee i = i; & i \vee h = i; & h \vee i = i; & h \vee h = h. \end{array}$$

$$|A \wedge \neg A| = h$$

$$|A \wedge i| = |A|$$

$$|A \vee \neg A| = i$$

$$|A \wedge h| = h$$

$$|A \vee i| = i$$

$$|A \vee h| = |A|$$



**Abszorpció:** A konjunkció (diszjunkció) abszorptív a diszjunkcióra (konjunkcióra) nézve.

$$p \wedge (p \vee q) = \text{😊}$$

$$p \vee (p \wedge q) = \text{😊}$$

**De Morgan azonosságok:** Két kijelentés konjunkciójának (diszjunkciójának) negációja logikailag ekvivalens a két kijelentés negációjának diszjunkciójával (konjunkciójával).

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

**Disztributivitás:** A konjunkció (diszjunkció) disztributív a diszjunkcióra (konjunkcióra) nézve.

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

De - Morgan azonosságok:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását.

- a) Nem félek a dolgozattól.
- b) Minden filmet láttam már.
- c) Minden szarka farka tarka.
- d) Van rövid nyakú zsiráf, amely jól fésült.
- e) Létezik olyan geometriai rendszer, amelyben a háromszög belső szögeinek összege nem  $180^\circ$ .
- f) Minden érettségi feladatsorban van ilyen feladat.
- g) Létezik holló, amely nem fekete.
- h) Egyik 7-tel osztható szám sem osztható 5-tel.
- i) Bármely két egyenes metszi egymást.

- a) Félek a dolgozattól.
- b) Van olyan film, amit még nem láttam.
- c) Van olyan szarka, amelyiknek a farka egyszínű.
- d) Minden rövid nyakú zsiráf rosszul fésült.
- e) Bármely geometriai rendszerben a háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ .
- f) Létezik olyan érettségi feladatsor, amelyben nincs ilyen feladat.
- g) Minden holló fekete.
- h) Létezik olyan héttel osztható szám, amely 5-tel is osztható.
- i) Van két egyenes, melyek nem metszik egymást.



**1. K1**

Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását! Melyik igaz, melyik hamis az állítások közül?

- a)  $A = \{\text{Három egymást követő egész szám összege mindig osztható hárommal.}\}$
- b)  $B = \{\text{Minden magyar állampolgár beszél magyarul.}\}$
- c)  $C = \{\text{Van olyan egész szám, aminek a számjegyeit összeadva a szám négyzetgyökét kapjuk.}\}$
- d)  $D = \{\text{A háromszög súlypontja mindig a háromszög belsejében van.}\}$
- e)  $E = \{\text{Minden ember szereti a mézet.}\}$
- f)  $F = \{\text{Van olyan ember, akinek minden állítása igaz.}\}$
- g)  $G = \{\text{Van olyan ember, aki soha nem téved.}\}$
- h)  $H = \{\text{Van olyan szerelem, ami el nem múlik.}\}$
- i)  $I = \{\text{Minden évben legalább egyszer elmegyünk nyaralni.}\}$
- j)  $J = \{\text{Minden héten van olyan nap, amikor tornázom és úszom is.}\}$

- a) Van olyan 3 egymást követő egész szám, hogy az összegük nem osztható hárommal.
- b) Van olyan magyar állampolgár, aki nem beszél magyarul.
- c) Minden egész szám számjegyeit összeadva a szám négyzetgyökét kapjuk.
- d) Van olyan háromszög, amelyiknek a súlypontja nem a háromszög belsejében van.
- e) Van olyan ember, aki nem szereti a mézet.
- f) Minden embernek van olyan állítása, amely nem igaz.
- g) Minden ember téved.
- h) Minden szerelem elmúlik.
- i) Van olyan év, amikor nem megyünk el a moziba.
- j) Van olyan hét, amelyiken van olyan nap, amikor nem tornázom, vagy nem úszom.