Németh László Matematikaverseny, Hódmezővásárhely

2016. április 11.

A 11-12. osztályosok feladatainak javítókulcsa

Feladatok csak szakközépiskolásoknak

Sz 1.

Tegyük fel, hogy az egyes csapoknak külön-külön a, b, c órára van szüksége a medence megtöltéséhez. Ekkor egy óra alatt az egyes csapok a medencének rendre $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ részét töltik meg. Az első két csap együtt 1,2 óra alatt végez a teljes medencével, ebből a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1{,}2}{a} + \frac{1{,}2}{b} = 1$$

Hasonlóképpen, abból a tényből, hogy a második és harmadik csap együtt 2 óra alatt, az első és harmadik együtt pedig másfél óra alatt végez, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1$$

$$\frac{1{,}5}{a} + \frac{1{,}5}{c} = 1$$

(3 pont)[1]

Vegyük észre, hogy a fenti egyenletrendszer $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ helyettesítéssel elsőfokú lineáris egyenletrendszerré alakítható:

$$\begin{aligned} 1{,}2x + 1{,}2y \phantom{+ 1{,}5z} &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 \\ 1{,}5x + \phantom{1{,}2y} + 1{,}5z &= 1 \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer megoldása $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{6}$, amiből azt kapjuk, hogy az első csap 2, a második 3, a harmadik pedig 6 óra alatt töltené meg a medencét.

(3 pont)[2]

Mivel $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, a három csap együtt pontosan egy óra alatt tölti meg a medencét.

(1 pont)

---

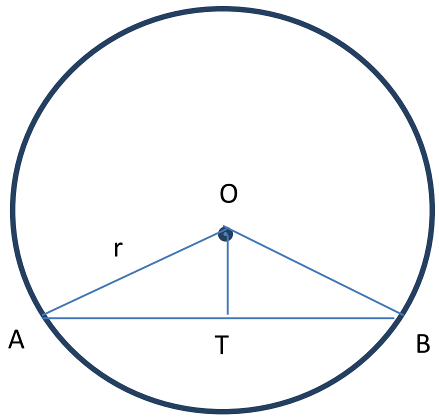
[1] Természetesen akkor is jár a 3 pont, ha a versenyző más, a megoldás irányába mutató egyenletrendszert ír fel. Ha az egyenletrendszer felírásának gondolatmenete helyes, de a versenyző hibát vét, a hiba súlyosságától függően 1-2 pont adható az egyenletrendszer felírásáért.

[2] Az egyenletrendszer logikailag helyes, de számolási hibás megoldásáért 1-2 pont jár.

Sz 2.

Tekintsük az ábra jelöléseit. Nyilvánvaló, hogy a folyadék a henger térfogatát pontosan olyan arányban tölti ki, ahogyan az AB húr által meghatározott körszelet aránylik a kör területéhez. Ha ugyanis a henger hossza m, akkor a keresett arány $\rho = \frac{V_{folyadék}}{V_{henge}} = \frac{mT_{körszelet}}{mT_{kör}} = \frac{T_{körszelet}}{T_{kör}}$

(1 pont)



A kör területe $T_{kör} = r^2\pi$, Feladatunk tehát a körszelet területének meghatározása. Ezt úgy tehetjük meg, ha az AOB körcikk területéből kivonjuk az AOB háromszög területét.

(1 pont)[3]

Tudjuk, hogy $\overline{OT} = \frac{r}{2}$. ezért az AOT szög koszinusza $\frac{1}{2}$, így $AOT = 60°$, az AOB szög pedig nyilván 120 fokos. Ebből következően az AOB körcikk területe a kör területének harmada, tehát $\frac{r^2\pi}{3}$-

(2 pont)

Ismét kihasználva, hogy az AOT szög 60 fokos, $\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2}r, \overline{AB} = \sqrt{3}r$, így az AOB háromszög területe $T_{háromszög} = \frac{\overline{ABOT}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

(1 pont)

A keresett arány így $\rho = \frac{T_{körszelet}}{T_{kör}} = \frac{\frac{r^2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2}{r^2\pi} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}1955$, a folyadék tehát a tartály térfogatának 19,55 százalékát foglalja el.

(1 pont)

[3] Megadható a pont, ha a dolgozatból kiderül a gondolatmenet.

Feladatok szakközépiskolásoknak és gimnazistáknak

G-Sz 3.

Jelöljük az induló tőkét T-vel, a havi járadékot J-vel, az éves kamatlábat p-vel, vezessük be továbbá a $q = 1 + \frac{p}{1200}$ jelölést (ennyiszerese lesz a hó végén a havi kamattal növelt betét a hó eleji összegnek). Jelölje továbbá H_i az i-edik hónap végén rendelkezésre álló összeget.

Az első hónap végén a teljes összeg kamatozik, majd a betét a járadék összegével csökken, ezért $H_1 = Tq - J$. A második hónapban a H_1 összeg kamatozik, majd ismét J-vel csökken a betét, ezért $H_2 = H_1 q - J = (Tq - J)q - J = Tq^2 - Jq - J$. Hasonlóan, $H_3 = Tq^3 - Jq^2 - Jq - J$,illetve általában

$$H_i = Tq^i - Jq^{i-1} - \cdots - Jq - J = Tq^i - J(q^{i-1} + \cdots + 1) = Tq^i - J\frac{q^i - 1}{q - 1}$$

(3 pont)[4]

A feladat ezt követően adott J járadék esetén a legnagyobb olyan i megtalálása, amely mellett $H_i > 0$, azaz megoldandó a $Tq^i - J\frac{q^i-1}{q-1} > 0$ egyenlőtlenség.

Az egyenlőtlenség ekvivalens átalakításához szükséges néhány feltételezés, ami a feladat eredeti tartalmából nyilvánvalóan adódik: feltesszük egyrészt, hogy a járadék összege kisebb az indulótőke felénél (tehát az összeg legalább két hónapig kitart), továbbá, hogy a járadék nagyobb, mint a tőke egy havi kamata (ellenkező esetben az összeg folyamatosan növekedne). Az utóbbi feltétel jelöléseinkkel $\frac{T}{J}(q-1) < 1$ alakban írható.

(1 pont)[5]

Amennyiben mindezek a feltételek teljesülnek, a megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens átalakításokkal $q^i < \frac{1}{1-\frac{T}{J}(q-1)}$ alakra hozható, ami (a fenti feltételek miatt) pontosan akkor teljesül, amikor $i < \frac{-\log(1-\frac{T}{J}(q-1))}{\log q}$

[4] Ha a versenyző nem oldja meg általánosan a feladatot, hanem külön-külön elvégzi az (egyébként helyes) számítást az egyes járadékokra, akkor az erre a részre járó három pontból kettőt adjunk.
Teljes értékű megoldásnak fogadható el a függvénytáblázatban található annuitás formula megfelelő indoklással ellátott alkalmazása.
A teljes feladatra összesen maximum 3 pont adható, ha a versenyző kiszámolja az időtartamot az egyik járadékra, majd (tévesen) feltételezi, hogy az időtartam a járadéknak lineáris függvénye.

[5] A megoldásra akkor adható teljes pontszám, ha a megfelelő diszkussziót elvégzi a versenyző.

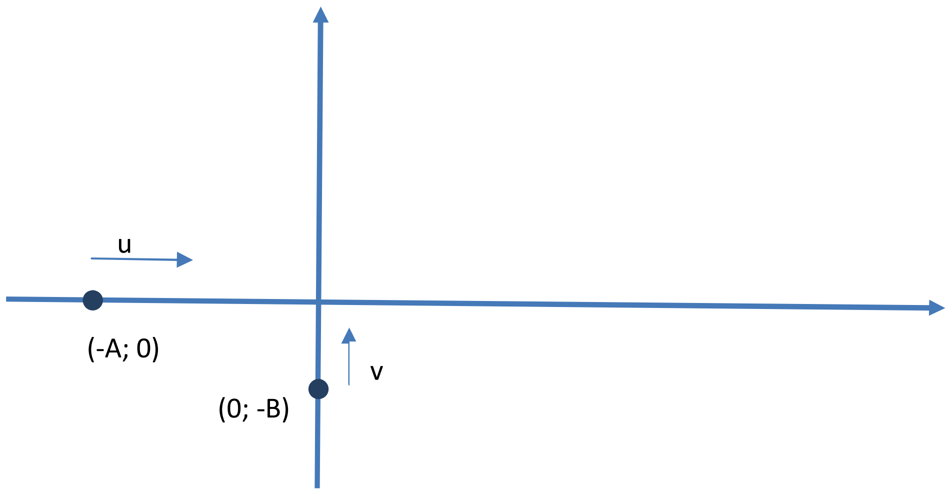
(2 pont)

A fenti egyenlőtlenségbe T=10.000.000, q=1.0033 értékeket helyettesítve J=100.000 esetén i<121,8 , J=250.000 esetén i<43,0. Kapjuk tehát, hogy

a) Havi 100 ezer fortint járadékot 121 hónapon keresztül vehetünk föl, a 122. hónapban fölvett maradványértékkel
b) Havi 200 ezer forint járadékot pedig 43 hónapon keresztül vehetünk föl, a 44. hónap végén felvett maradványértékkel.

(2 pont)

G-Sz 4. A kiinduló ($t = 0$) helyzetet a derékszögű koordinátarendszerben az ábra szemlélteti. t idő elteltével a két jármű koordinátái rendre $(-A + ut;\ 0)$ és $(0;\ -B + vt)$ lesznek, így távolságuk $d(t) = \sqrt{(-A + ut)^2 + (-B + vt)^2}$. Feladatunk a $d(t)$ függvény minimumának meghatározása $t, A, B, u, v\ \geq 0$ feltételek mellett



(2 pont)

Tekintettel arra, hogy a négyzetgyök-függvény az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő, továbbá, hogy a $d(t)$ távolság az adott feltételek mellett minden t-re értelmezett, a $d(t)$, a minimumhelyének meghatározásához a gyökjel elhagyható, $d(t)$-nek ugyanott lesz minimuma, ahol a gyök alatti kifejezésnek. A feladatot tehát visszavezettük a $q(t) = (-A + ut)^2 + (-B + vt)^2$ paraméteres másodfokú kifejezés minimumának meghatározására.

(1 pont)[6]

$q(t)$-t tovább alakítva: $q(t) = (u^2 + v^2)t^2 - 2(Au + Bv)t + A^2 + B^2 = \left(\sqrt{u^2 + v^2}t - \frac{Au+Bv}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 - \frac{(Au+Bv)^2}{u^2+v^2} + A^2 + B^2$

(2 pont)

[6] Ez a pont csak akkor adható, ha a dolgozat valóban kitér a diszkusszióra, a gyökjel elhagyhatóságát indokolni kell!

Látható, hogy $q(t)$ olyan másodfokú kifejezés, amelynek (a paraméterekre kirótt feltételek miatt) a $t \geq 0$ tartományban minimuma lesz, mégpedig akkor, amikor a négyzetes tag 0, azaz $t = \frac{Au+Bv}{u^2+v^2}$ esetén.

(2 pont)[7]

Az adott feltételek mellett a két autó távolsága a kiindulástól számított $t = \frac{Au+Bv}{u^2+v^2}$ idő múlva lesz minimális

(1 pont)

G-Sz 5.

a) A függvény akkor és csak akkor értelmezett, amikor a gyök alatti mennyiségek értelmezettek és a nevező nem zéró. A gyök alatti mennyiségek akkor és csak akkor értelmezettek, ha $x \geq 0$.

(1 pont)

Vizsgáljuk most a $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = 0$ egyenletet. Feltéve, hogy x>=0, az egyenlet $2x = x + 1$ alakra hozható, azaz x=1 esetén lesz a nevező 0.

(1 pont)

Kapjuk, hogy a függvény értelmezési tartománya $\text{É}T = [0, \infty) \setminus \{1\}$

(1 pont)[8]

b) Az értékkészlet meghatározásához megvizsgáljuk, hogy az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}} = K$

egyenletnek K mely értékei mellett van valós gyöke. Tekintettel arra, hogy a nevező a $[0,1)$ intervallumon negatív, az $(1, \infty)$ intervallumon pedig pozitív, a vizsgálatot esetszétválasztással végezzük.

(i) Legyen először $x \in [0,1)$, ekkor értelemszerűen csak $K < 0$ esetén remélhetünk megoldást, hiszen a nevező negatív. Az adott feltételek mellett az egyenlet ekvivalens átalakításokkal előbb $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x} = -\frac{1}{K}$ alakra, majd $x - \frac{2\sqrt{2}}{K}\sqrt{x} + \frac{1}{K^2} - 1 = 0$ alakra hozható, ez az egyenlet pedig $a = \sqrt{x}$ helyettesítéssel másodfokúra vezethető vissza. A

[7] A pontozáskor ragaszkodjunk a szabatos indokláshoz, pl. az itt leírt levezetéshez. Mindenképp indokolnia kell aversenyzőnek, hogy az adott feltételek mellett létezik a minimum és hogy milyen módon kaphatjuk meg. **Vonjunk le pontot a „minimum a zéróhelyek számtani közepe”** pongyola fogalmazásért, hiszen az adott feltételek mellett a q(t) kifejezésnek nincs valós zéróhelye. Ugyanilyen megfontolásból pontlevonás „jár” a megoldóképlet alkalmazásáért, hiszen a diszkrimináns negatív lenne, tehát a megoldóképlet nem alkalmazható. Elfogadható viszont a hivatkozás arra az ismert tényre, hogy az $ax^2 + bx + c$ kifejezésnek $a > 0, b < 0$ feltételek mellett $x = -\frac{b}{2a}$-ban (az $x > 0$ tartományban) globális minimuma van.

[8] Az a) részre összesen tehát 3 pont adható

kapott $a^2 - \frac{2\sqrt{2}}{K}a + \frac{1}{K^2} - 1 = 0$ akkor és csak akkor van nemnegatív megoldása, ha $\sqrt{\frac{4}{K^2}+4} \geq -\frac{2\sqrt{2}}{K}$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $K \leq -1$

(2 pont)[9]

(ii) Legyen most $x \in (1,\infty)$, mivel ilyenkor a nevező pozitív, csak $K > 0$ esetén várható megoldás. Az előzőhöz hasonló levezetéssel az egyenlet $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{K}$, majd $x - \frac{2\sqrt{2}}{K}\sqrt{x} + \frac{1}{K^2} - 1 = 0$ alakra hozható, ami $a = \sqrt{x}$ helyettesítéssel az $a^2 - \frac{2\sqrt{2}}{K}a + \frac{1}{K^2} - 1 = 0$ másodfokú egyenletre vezethető vissza. Mivel $a_1 = \frac{2\sqrt{2}}{K} + \sqrt{\frac{4}{K^2}+4}$, a diszkrimináns mindig pozitív és $K > 0$ miatt $a_1$is mindig pozitív, tehát $x \in (1,\infty)$ esetén a függvény minden pozitív valós értéket felvesz.

(2 pont)

Következésképp a függvény értékkészlete $\text{É}K = (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$

(1 pont)[10]

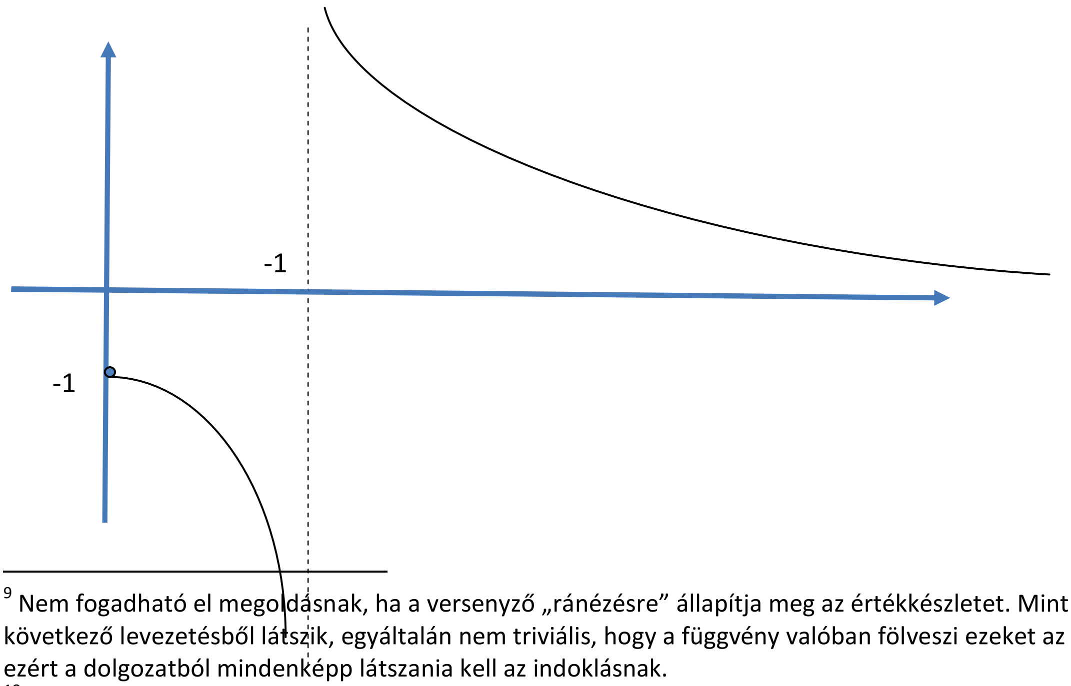
c) A függvénynek nyilvánvalóan nincs zéróhelye, hiszen a számláló értéke konstans.

(1 pont)

A függvénynek globális szélsőértéke sincs, hiszen az értékkészlet minden pozitív szám és valamennyi, -1-nél nem nagyobb negatív szám.

(1 pont)

A függvény grafikonját az alábbi ábra szemlélteti:



[9] Nem fogadható el megoldásnak, ha a versenyző „ránézésre” állapítja meg az értékkészletet. Mint ebből és a következő levezetésből látszik, egyáltalán nem triviális, hogy a függvény valóban fölveszi ezeket az értékeket, ezért a dolgozatból mindenképp látszania kell az indoklásnak.

[10] Ismét hangsúlyozzuk, hogy a b) részre adható összesen 5 pont akkor jár, ha a dolgozatból látható az indoklás. Ha a versenyző helyesen megadja az értékkészletet, de nem indokol, a b) részre összesen 2 pontot adjunk.

G-Sz 6. Mint minden szabályos sokszög, a szabályos 9-szög is körbe írható. A körülírt körben az A_1A_2 oldalhoz tartozó középponti szög (radiánban) $\frac{2\pi}{9}$. Feltételezhető, hogy a körülírt kör sugara egységnyi, ekkor az A_1A_2oldal hossza: $A_1A_2 = 2\sin\frac{\pi}{9}$. Kihasználva, hogy az $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_5}$ átlókhoz rendre $\frac{4\pi}{9}$ és $\frac{8\pi}{9}$ középponti szögek tartoznak, a két kérdéses átló hossza: $\overline{A_1A_3} = 2\sin\frac{2\pi}{9}$ és $\overline{A_1A_5} = 2\sin\frac{4\pi}{9}$. Így a bizonyítandó állítás:

$$2\sin\frac{\pi}{9} + 2\sin\frac{2\pi}{9} = 2\sin\frac{4\pi}{9}, \text{ azaz}$$

$$\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9} = \sin\frac{4\pi}{9}$$

(3 pont)

Állításunk igazolásához kihasználjuk azokat az egyszerű tényeket, hogy $\frac{4\pi}{9} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9}$ és $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Így az addíciós tételek alkalmazásával a következő összefüggést kell igazolnunk:

$\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9}$, ami ekvivalens átalakításokkal

$$\sin\frac{\pi}{9} = 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9}$$

alakú, ami viszont nyilvánvalóan teljesül, hiszen $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(4 pont)

Feladatok csak gimnazistáknak

G 7. A feladat tulajdonképpen nem más, mint 2^{2016} 100-zal vett osztási maradékának meghatározása.

(1 pont)

Az alábbiakban két megoldást adunk[11], mindkét megoldás esetén kihasználunk két ismert számelméleti tényt. Egyrészt két természetes szám szorzata 100-zal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a tényezők maradékainak szorzata, másrész (ezen állítás következtében) amennyiben

[11] Természetesen bármelyi elfogadható teljes értékűnek, illetve ezektől eltérő, megfelelően indokolt megoldás is.

$n = 100l + k$ akakú (n, l, k egészek), akkor n^xés k^x 100-zal vett osztási maradékai (azaz a tízes számrendszerben utolsó két jegyük) azonosak lesznek bármely $x \geq 0$ egészre.

(1 pont)

Első megoldás: Írjuk fel az alábbi táblázatba 2 hatványainak (100-zal vett) maradékai által alkotott sorozat első néhány elemét:

$\mathbf{2^1}$	$\mathbf{2^2}$	$\mathbf{2^3}$	$\mathbf{2^4}$	$\mathbf{2^5}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{2^7}$	$\mathbf{2^8}$	$\mathbf{2^9}$	$\mathbf{2^{10}}$
2	4	8	16	32	64	28	56	12	24
$\mathbf{2^{11}}$	$\mathbf{2^{12}}$	$\mathbf{2^{13}}$	$\mathbf{2^{14}}$	$\mathbf{2^{15}}$	$\mathbf{2^{16}}$	$\mathbf{2^{17}}$	$\mathbf{2^{18}}$	$\mathbf{2^{19}}$	$\mathbf{2^{20}}$
48	96	92	84	68	36	72	44	88	76
$\mathbf{2^{21}}$	$\mathbf{2^{22}}$	$\mathbf{2^{23}}$	$\mathbf{2^{24}}$	$\mathbf{2^{15}}$	$\mathbf{2^{16}}$				
52	4	8	16	…	…				

A táblázatból látható, hogy 2^{22} és 2^2 ugyanúgy 4-et adnak maradékul.

(3 pont)

Ebből viszont azonnal következik, hogy 2^{42}, 2^{62},… általában véve 2^{20k+2} ugyancsak 4-et fog maradékul adni bármilyen k természetes szám esetén.

(2 pont)

Mivel 2002 = 20*100+2 szintén ilyen alakú, ezért 2^{2002} utolsó két jegye szintén 04 lesz. Ekkor viszont 2^{2016} utolsó két jegyét egyszerűen megkaphatjuk 2^{2002} és 2^{14}maradékainak szorzataként. A fenti táblázatból látható, hogy 2^{14} maradéka 84, ezért $\mathbf{2^{2016}}$ utolsó két jegye 4*84=336 utolsó két jegyével, azaz **36-tal egyenlő**.

(1 pont)

Második megoldás: Írjuk fel 2^{2016}-ot $2^6 \cdot (2^{10})^{201} = 64 \cdot 1024^{201}$alakban. Mivel 1024 és 24 hatványai azonos maradékot adnak 100-zal osztva, nyilvánvaló, hogy a keresett maradék megegyezik $64 \cdot 24^{201}$ utolsó két jegyével.

(2 pont)

Írjuk fel 24-et 25-1 alakban és alkalmazzuk a binomiális tételt:

$$24^{201} = (25-1)^{201} =$$
$$= \binom{201}{0} 25^{201} + \binom{201}{1} 25^{200}(-1)^1 + \cdots + \binom{201}{200} 25(-1)^{200} + \binom{201}{201}(-1)^{201}$$

Ennek az összegnek az utolsó kivételével (ami -1-gyel egyenlő) mindegyik tagja osztható 25-tel, ezért 24^{201} felírható 25A-1 alakban (A pozitív egész).

Ekkor viszont $64 \cdot 24^{201} = 64(25A-1) = 1600A - 64$ valamely A természetes számra, amiből, függetlenül A értékétől, 1600A osztható 100-szal. Nyilvánvaló, hogy egy 100-szal osztható számból 64-et levonva az eredmény utolsó két jegye 36 lesz, **ezért $\mathbf{2^{2016}}$ utolsó két jegye 36**.

(4 pont)[12]

G 8. Rendezzük a bal oldalon álló szorzat tényezőit az alábbi táblázatba:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n}
\end{array}
$$

Egyrészt látható, hogy a tényezők összege minden sorban 1 (így a teljes táblázatban mindösszesen n), másrészt az is világos,hogy a tényezők száma$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2 pont)

Jelöljük a szorzat tényezőit $a_1, a_2, \dots a_M$-mel ($M=\frac{n(n+1)}{2}$) és alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[M]{a_1 a_2 \dots a_M} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_M}{M}$$

(3 pont)

Visszahelyettesítve az eredeti tényezőket, valamint $M=\frac{n(n+1)}{2}$-t és $a_1+a_2+\cdots+a_M=n$-t , kapjuk, hogy

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n}} \leq \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n+1}$$

Mindkét oldal pozitív, ezért az $\frac{n(n+1)}{2}$-edik kitevőre emelés ekvivalens átalakítás, és éppen a bizonyítandó állítást eredményezi:

$$1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n} \leq \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(3 pont)[13]

[12] Természetesen ez a megoldás is összesen 8 pont, az általános részre adható két ponttal együtt

[13] Más gondolatmenet esetén is a fenti 2-3-3 bontás szerint pontozzunk: adjunk 2 pontot a megoldás irányába mutató átrendezésért, további 3 pontot pedig olyan értékes észrevételért, amiből a megoldás már egyszerű átrendezéssel levezethető